

ISSAE, Le cnam-Liban

MVA005

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

Cours et Exercices

Noureddine ASSAAD

Docteur ès sciences physiques et Mathématiques

Chef de cellule des sciences physiques et Mathématique

Membre du laboratoire international de laser (Kharkov)

2014

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

AVANT-PROPOS

PAGE II

CHAPITRE 1

LES NOMBRES COMPLEXES

PAGE 1

1.1	Généralités	1
1.2	Définition et propriétés	3
1.2.1	Représentation d'un nombre complexe	3
1.2.2	Module et argument	4
1.2.3	Nombres complexes particuliers	5
1.3	Opérations sur les nombres complexes	5
1.3.1	Egalité	6
1.3.2	Multiplication par un nombre réel	6
1.3.3	Addition et soustraction	6
1.3.4	Multiplication et division	7
1.3.5	Rotation	9
1.3.6	Conjugué d'un nombre complexe	10
1.4	Formule de De Moivre	11
1.5	Racines d'un nombre complexe	11
1.6	Exercices	12

CHAPITRE 2

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

PAGE 15

2.1	Notion de Variable	15
2.1.1	Ensemble des nombres réels	15
2.1.2	Valeur absolue	17
2.1.3	Constantes et variables	18
2.1.4	Intervalles	18
2.2	Fonction	19
2.2.1	Représentation des fonctions	20
2.2.2	Représentation analytiques des fonctions	21
2.2.3	Classifications des fonctions	27
2.2.4	Construction des fonctions	32
2.3	Notion de limite	34
2.3.1	Voisinage d'un point	35
2.3.2	Tangente	36
2.3.3	Limite en un point	36
2.3.4	Extensions de la notion de limite	38
2.3.5	Limites de fonctions usuelles	42
2.3.6	Formes indéterminées	43

2.4	Continuité	45
2.4.1	Continuité en un point	46
2.4.2	Théorèmes de continuité	46
2.4.3	Prolongement par continuité	47
2.4.4	Continuité sur un segment	47
2.5	Fonction inverse ou réciproque	48
2.5.1	Fonctions trigonométriques inverses	49
2.5.2	Fonctions hyperboliques inverses	51
2.6	Exercices	53

CHAPITRE 3 DÉRIVÉE ET DIFFÉRENTIELLE PAGE 61

3.1	Le taux de variation	61
3.1.1	Croissance de bactérie	62
3.1.2	Vitesse instantanée	63
3.1.3	Tangente en un point	64
3.2	Dérivée	65
3.2.1	Fonction dérivable	68
3.2.2	Opérations sur les fonctions dérivables	70
3.2.3	Relation liant les dérivées de deux fonctions réciproques	73
3.2.4	Dérivées d'ordres supérieurs	73
3.3	Différentielle d'une fonction à une variable	73
3.3.1	Interprétation géométrique de la différentielle	74
3.3.2	Différentielle d'ordre supérieur	74
3.4	Applications	74
3.4.1	Tangente et normale sur une courbe	75
3.4.2	Analyse des fonctions	77
3.4.3	Optimisation	82
3.5	Développement limité	83
3.5.1	Théorèmes relatifs aux fonctions dérivables	84
3.5.2	Formules de Taylor	87
3.5.3	Développements limités	89
3.5.4	Utilisations des développements limités	95
3.6	Exercices	103

CHAPITRE 4 CALCUL INTÉGRAL PAGE 113

4.1	Notion de primitive, intégrale indéfinie	113
4.1.1	Intégrale indéfinie	114
4.1.2	Primitives usuelles	115
4.2	Méthodes générales de calcul	116
4.2.1	Changement de variable	116
4.2.2	Intégration par parties	118
4.2.3	Intégrations de quelques types de fonctions rationnelles	120
4.2.4	Intégration des fonctions trigonométriques	129
4.3	Intégrales définies	132
4.3.1	Propriétés	134
4.3.2	Calcul de l'intégral définie	136

4.4	Applications du calcul intégral	138
4.4.1	Calcul des aires limitées par courbe	138
4.4.2	Longueur d'un arc	140
4.4.3	Aire et volume d'un solide de révolution	142
4.4.4	Centre de gravité	145
4.4.5	Moment d'inertie	148
4.5	Exercices	149

CHAPITRE 5 **EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES** **PAGE 155**

5.1	Equations différentielles du premier ordre	156
5.1.1	Définition et classification	156
5.1.2	Equations à variables séparables	158
5.1.3	Equations homogènes	159
5.1.4	Equations se ramenant aux équations homogènes	161
5.1.5	Equations linéaires du premier ordre	162
5.1.6	Equations des types spéciaux	166
5.2	Equations différentielles du second ordre	171
5.2.1	Equations différentielles se ramenant au premier ordre	171
5.2.2	Equations linéaires à coefficients Variables	172
5.2.3	Equations linéaires à coefficients constantes	176
5.3	Applications	181
5.3.1	Variation de température	181
5.3.2	Circuit R,L	183
5.3.3	Oscillateurs	185
5.4	Exercices	187

CHAPITRE 6 **SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES** **PAGE 192**

6.1	Suite numérique	192
6.1.1	Limite d'une suite. Convergence et divergence	193
6.1.2	Définition par récurrence	197
6.1.3	Suites bornées	198
6.1.4	Suite monotone	198
6.1.5	Quelques limites usuelles	199
6.2	Séries numériques : Définitions	201
6.2.1	Série géométrique	202
6.2.2	Théorèmes généraux	203
6.2.3	Test de convergence	204
6.2.4	Séries alternées	207
6.3	Représentation des fonctions en série	207
6.3.1	Série de puissance	208
6.3.2	Série de Taylor	209
6.4	Exercices	211

CHAPITRE A **FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES** **PAGE 214**

A.1	Les Fonctions Trigonometriques	214
A.1.1	Fonctions standards	215

A.1.2	Valeurs des Fonctions des angles particuliers	215
A.1.3	Intervalles des valeurs	215
A.1.4	Graphes	216
A.1.5	Fonctions des angles en Terms des angles du Quadrant I	216
A.2	Identités Trigonométriques	217
A.2.1	Identités de Pythagore	217
A.2.2	Définitions	217
A.2.3	Périodicité	217
A.2.4	Formules d'Addition	217
A.2.5	Théorème de sinus et lois de cosinus	218
A.2.6	Lois de Tangente	219
A.2.7	Fonctions hyperboliques	219
A.2.8	Relations avec les fonctions trigonométriques	219
A.2.9	Fonctions réciproques	220
A.2.10	L'alphabet grec	220

CHAPITRE B DÉRIVÉES PAGE 221

B.1	Définition	221
B.2	Règles de Différentiation	221
B.3	Formules de Dérivation	221
B.3.1	Fonctions Algébriques	222
B.3.2	Fonctions Trigonométriques	222
B.3.3	Fonctions Trigonométriques Inverses	222
B.3.4	Fonctions Exponentielles et Logarithmiques	222
B.3.5	Fonctions Hyperboliques	223
B.3.6	Fonctions Hyperboliques Inverses	223

CHAPITRE C TABLE DES INTÉGRALES PAGE 224

C.1	Primitives usuelles	224
C.2	Racines des Expressions Quadratiques	225
C.2.1	Formes avec $\sqrt{a^2 + u^2}, a > 0$	225
C.2.2	Formes avec $\sqrt{a^2 - u^2}, a > 0$	225
C.2.3	Formes avec $\sqrt{u^2 - a^2}, a > 0$	226
C.2.4	Formes avec $\sqrt{2au - u^2}$	226
C.2.5	Formes avec $a + bu$	226
C.2.6	Fonctions Trigonométriques	227
C.2.7	Fonctions Trigonométriques Inverses	228
C.2.8	Fonctions Exponentielles et Logarithmiques	229
C.2.9	Fonctions Hyperboliques	229

CHAPITRE D LONGUEURS, SURFACES, VOLUME PAGE 230

D.1	Polygone régulier de n côtés	230
D.2	Cercle	231
D.3	Autres formes géométriques	232

Avant-propos

CE cours couvre le programme de l'UE : MVA005 : Calcul différentiel et intégral, du cnam. Il s'adresse en premier lieu aux étudiants de premier cycle des filières Statistique, Mécanique des structures, Génie civil et Electromécanique, mais il s'adresse également aux étudiants en mathématique et en physique orientés vers les applications.

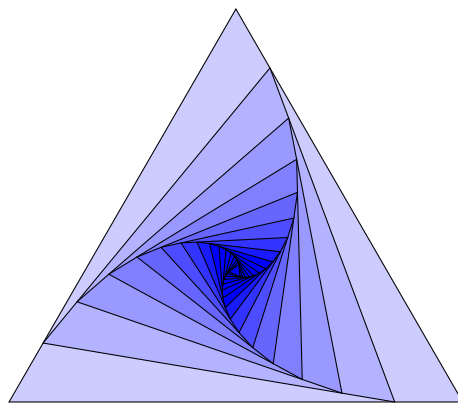
Les sujets traités dans ce livre sont : Les fonctions usuelles (limite, continuité, dérivabilité, développements limités) , calcul intégral, équations différentielles, suites et séries numériques. Ces sujets sont classiques et servent normalement de base à la réalisation de tout d'analyse de même niveau.

Le cours est agrémenté de nombreux Exemples et Applications

Chaque chapitre est suivi d'une série des exercices illustrent systématiquement les notions discutés dans le cours, et ils aident l'étudiant à tester sa compréhension du cours, lui permettent d'approfondir sa connaissance des notions exposées...

Mais, des autres T.D. peuvent être traités en classe.

Ces notes de cours sont des clés, des autres ressources sont bien nécessaires pour une connaissance plus approfondie



Malgré de très nombreuses relectures il restera toujours des fautes. N'hésitez pas à me signaler les différentes erreurs.

Ces notes de cours sont rédigés avec *Scientific WorkPlace* 5.5 (Build 2960).
Des "Latex packages" non incluses dans *Scientific WorkPlace* sont ajoutés
N. ASSAAD. *Le cnam-Liban* 2014

Chapitre 1

Les nombres complexes

LA notion de nombre complexe a été introduite par les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Raphaël Bombelli et Tartaglia comme intermédiaire de calcul pour trouver des solutions aux équations polynomiales du troisième degré. Il semblerait que ce soit Héron d'Alexandrie qui ait inventé le nombre impossible. L'aspect géométrique des nombres complexes ne se développe qu'à partir du XIX^e siècle chez l'abbé Buée et Jean-Robert Argand (plan d'Argand), puis ensuite chez Carl Friedrich Gauss et chez Augustin Louis Cauchy.

La notion complexe et ses propriétés sont très utiles dans divers domaines de physique :

1. En électricité : Fonctionnement d'un circuit en régime sinusoïdal forcé.
2. En optique : Etude des interférences et de diffractions lumineuses et les ondes électromagnétiques.
3. En mécanique : Régime sinusoïdal forcé d'un oscillateur harmonique, les phénomènes vibratoires.

1.1 Généralités

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$. On définit sur \mathbb{R}^2 les deux lois de composition interne :

- L'addition (+) : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- La multiplication (\cdot) : $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

On démontre que la structure $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un corps commutatif

En effet les deux lois (+) et (\cdot) sont :

- commutatives
- associatives
- chacune admet un élément neutre
- chaque élément de \mathbb{R}^2 admet un symétrique (sauf $(0, 0)$ pour la multiplication)
- et la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

De plus si a est un nombre réel, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $a(x, y) = (ax, ay)$

Considérons en particulier les éléments de la forme $(x, 0)$ et $(0, y)$, chaque couple (x, y) s'exprime sous la forme :

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) \text{ et de plus } (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

Dans toutes les opérations qui peuvent être effectuées, l'élément $(x, 0)$ est équivalent au nombre réel x .

en effet :

- $(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0) \iff (x) + (x') = x + x'$
- $(x, 0) \cdot (x', 0) = (xx' - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot x') = (xx', 0) \iff (x) \times (x') = xx'$
- $(x, 0) \cdot (x, 0) = (x^2, 0) \iff (x) \times (x) = x^2$
- $(1, 0) \cdot (x, 0) = (1 \cdot x, 0) = (x, 0) \iff (1) \times (x) = x$
- $a(x, 0) = (ax, a \cdot 0) = (ax, 0) \iff a \times (x) = ax$
- $(x, 0) \cdot (0, y) = (x \cdot 0 - y \cdot 0, x \cdot y + 0 \cdot 0) = (0, xy) \iff x \times (0, y) = (0, xy)$

Donc on peut remplacer le couple $(x, 0)$ de \mathbb{R}^2 par le nombre réel x , par suite le couple $(1, 0)$ est équivalent au nombre 1.

Mais y a-t-il un nombre qui remplace le couple $(0, y)$? Supposons qu'il existe un nombre $j \sim (0, 1)$. on a donc :

$$(0, y) = y(0, 1) \sim jy = jy$$

Dans toutes les opérations qui peuvent être effectuées, l'élément $(0, y)$ est équivalent au nombre jy

En effet :

- $(0, y) + (0, y') = (0, y + y') \iff jy + jy' = j(y + y')$
- $a(0, y) = (0, ay) \iff a(jy) = jay$
- $(0, y) \cdot (0, y') = (0 - yy', 0 \cdot y + y' \cdot 0) = (-yy', 0) \iff (jy) \times (jy') = j^2yy' = -yy'$
- $(0, y) \cdot (0, y) = (-y^2, 0) \iff (jy) \times (jy) = j^2y^2 = -y^2$
- $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \iff j \times j = j^2 = -1$

On remarque, alors, que le nombre j n'est pas un nombre réel car l'équation $x^2 = -1$ n'a pas une solution dans \mathbb{R} . Le nombre j est donc un **nombre imaginaire**.

Quand même, si on écrit le couple

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + jy$$

rien ne se change et les opérations effectuées dans \mathbb{R}^2 se conservent.

○ Le nombre $x + jy$ ainsi défini est un nombre **complexe**.

1.2 Définition et propriétés

Définition 1.1 On appelle nombre complexe tout nombre z qui peut se mettre sous la forme :

$$z = x + jy \quad (1.1)$$

Où x et y sont des nombres réels

- x est la partie réelle de z et on note : $x = \text{Re}(z)$
 - y est la partie imaginaire de z et on note : $y = \text{Im}(z)$
- et j un nombre purement imaginaire défini par :

$$j = \sqrt{-1} \text{ ou } j^2 = -1 \quad (1.2)$$

Définition 1.2 On désigne par \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{z ; z = x + jy, x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} \quad (1.3)$$

L'ensemble \mathbb{C} muni de l'addition et de la multiplication est un corps commutatif et il est équivalent au corps $(\mathbb{R}^2, +, \times)$.

1.2.1 Représentation d'un nombre complexe

a) Représentation cartésienne

Soit M est un point du plan xOy défini par ses coordonnées x et y , le couple (x, y) des coordonnées cartésiennes définit le point M , alors que le nombre complexe $z = x + jy$ définit aussi le point M . Donc, chaque nombre complexe $z = x + jy$ représente un point $M(x, y)$ du plan (Oxy)

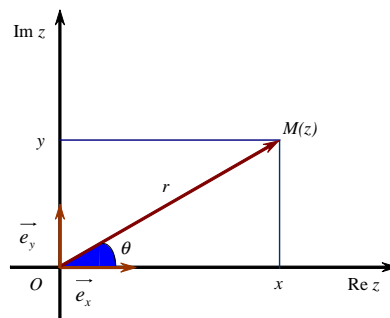


FIG. 1.1 – Représentation géométrique

Le nombre complexe z s'appelle l'*affiche* de M et le point $M(z)$ est l'image du nombre z dans la plan xOy .

L'écriture $z = x + jy$ d'un nombre complexe z est une représentation cartésienne.

Le plan complexe est l'ensemble des points M d'affixe $z = x + jy$. On pourra remarquer qu'il y a une parfaite correspondance entre le plan vectoriel muni d'un repère orthonormé et le plan complexe.

Pour $y = 0$ on a $z = x = \text{Re } z$ et pour $x = 0$ on a $z = jy$, alors l'axe (Ox) est l'axe des réels $(\text{Re } z)$ et l'axe Oy celui des imaginaires $(\text{Im } z)$ (Figure 1).

b) Représentation polaire

Soient \vec{e}_x et \vec{e}_y deux vecteurs unitaires portés par les axes Ox et Oy respectivement, et $M(x, y)$ un point du plan complexe (figure.1). Au point M on fait associer le rayon vecteur :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

soit θ l'angle que fait le vecteur \overrightarrow{OM} avec l'axe Ox et r la norme (ou module) de \vec{r} ($r = |\overrightarrow{OM}|$). La géométrie de la figure 1 montre que :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

Remplaçons x et y par leurs valeurs dans z , le nombre complexe s'écrit :

$$z = x + jy = (r \cos \theta) + j(r \sin \theta)$$

soit :

$$z = r (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (1.5)$$

cet écriture est une représentation trigonométrique (ou polaire) du nombre complexe.

c) Représentation exponentielle

En utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{aligned} \quad (1.6)$$

on trouve :

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta \quad (1.7)$$

Si on remplace $\cos \theta + j \sin \theta$ par $e^{j\theta}$ on obtient une représentation en une forme exponentielle de z :

$$z = r e^{j\theta} \quad (1.8)$$

1.2.2 Module et argument

Définition 1.3 La quantité r est le module du vecteur \overrightarrow{OM} ; r est donc le module de z et θ est l'argument de z :

$$r = |z| \quad \theta = \arg(z)$$

Si $z = x + jy$ avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ alors :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \text{ à } 2k\pi \text{ près}$$

On remarque :

– Si z est un nombre imaginaire pur ($z = jy$) alors :

$$\operatorname{Re}(z) = x = 0 \implies \theta = \arg(z) = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

– Si z un nombre réel pur : ($z = x$)

$$\operatorname{Im}(z) = y = 0 \implies \arg(z) = k\pi$$

avec k un entier relatif.

1.2.3 Nombres complexes particuliers

► $z = 1 = 1.1 + j.0 \implies x = 1$ et $y = 0$

en forme polaire : $1 = re^{j\theta} \implies r = |1| = 1$ et $\theta = \arg(1) = 0 \pm 2k\pi$:

$$\exp(\pm 2jk\pi) = 1$$

► $-1 = -1.1 + j.0 \implies |-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi + 2k\pi$:

$$\exp[\pm (2k + 1)\pi] = -1$$

► $z = j = 0.1 + j.1 \implies x = 0$ et $y = 1$

en forme polaire : $j = \rho e^{j\varphi} \implies \rho = |j| = 1$ et $\varphi = \arg(j) = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$:

$$\exp\left(j\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)\right) = j$$

► $z = -j = \frac{1}{j} \implies \left|\frac{1}{j}\right| = |-j| = 1$, $\arg(-j) = \arg\left(\frac{1}{j}\right) = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$:

$$\exp\left(-j\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)\right) = -j = \frac{1}{j}$$

1.3 Opérations sur les nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes muni de l'addition et de la multiplication comme sera défini plus bas détermine un corps commutatif.

1.3.1 Egalité

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont, respectivement, égales.

En effet :

On a noté que chaque nombre complexe $z = x + jy$ est l'image d'un point $M(x, y)$, par suite si z et $z' = x' + jy'$ sont égaux, donc ils représentent le même point $M(x, y)$ ce qui donne $x = x'$ et $y = y'$.

$$\forall (z = x + jy) \in \mathbf{C}, \forall (z' = x' + jy') \in \mathbf{C}, \text{ si } z = z' \implies x = x' \text{ et } y = y'$$

par suite $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} z = z' &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \\ z = z' &\Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{aligned}$$

1.3.2 Multiplication par un nombre réel

En multipliant un nombre complexe z par un réel a , les parties réelle et imaginaire de z seront multipliées par a :

$$\forall z = x + jy \text{ et } \forall a \in \mathbf{R} : az = a(x + jy) = ax + jay$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(az) &= a \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(az) &= a \operatorname{Im}(z) \end{aligned}$$

En particulier, pour $a = -1$:

$$-z = -(x + jy) = -x - jy$$

1.3.3 Addition et soustraction

Considérons les deux nombres complexes : $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$. Soit à calculer $Z = X + jY = z_1 + z_2$.

On a :

$Z = z_1 + z_2 = x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 = x_1 + x_2 + jy_1 + jy_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$ c'est-à-dire : $X = x_1 + x_2$ et $Y = y_1 + y_2$.

On écrit :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) \end{aligned}$$

on déduit tout simplement :

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \\ \arg Z &= \arctan\left(\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}\right) \end{aligned}$$

L'opération de soustraction des nombres complexes z_1 et z_2 est en fait une addition de z_1 avec $(-z_2)$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + jy_1) + (-x_2 - jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

ä **Exemple 1.1 :**

$$(1 - j) + (5 + 3j) = 6 + 2j$$

$$(3 + 4j) - (1 + 3j) = 2 + j$$

a) Propriétés de l'addition

Soient $z = x + jy$, $z' = x' + jy'$, et $z'' = x'' + jy''$ trois nombres complexes. On a par définition : $z + z' = x + x' + j(y + y')$, c'est-à-dire l'addition dans \mathbb{C} est une combinaison de deux additions dans \mathbb{R} , par suite toutes les propriétés de l'addition des réels sont valables dans l'ensemble \mathbb{C} :

1. L'addition des nombres complexes est commutative :

$$z + z' = z' + z$$

2. L'addition dans \mathbb{C} est associative : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$ on a :

$$z + (z' + z'') = (z + z') + z'' = z + z' + z''$$

3. Le nombre zéro est l'élément neutre : $0 = 0 + j0$;

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$$

4. Chaque nombre complexe $z = x + jy$ admet un opposé : $z' = x' + jy'$ tel que $z + z' = 0$:

$$z + z' = 0 \implies z' = -z = -x - jy \iff x' = -x \text{ et } y' = -y$$

1.3.4 Multiplication et division

Soient deux nombres complexes : $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$

Le produit effectué directement donne :

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 + j^2y_1y_2$$

Mais $j^2 = -1$, soit donc :

$$z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + j(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Si z_1 et z_2 sont exprimés en formes polaires : $z_1 = r_1e^{j\theta_1}$ et $z_2 = r_2e^{j\theta_2}$:

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{j\theta_1}) (r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

et on a :

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| \times |z_2| \\ \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \end{aligned}$$

Diviser deux nombres complexes z_1 par $z_2 \neq 0$, c'est de trouver le nombre complexe $Z = X + jY$ tel que $Z = \frac{z_1}{z_2}$ c'est-à-dire : $z_1 = Z z_2$, ou bien :

$$x_1 + jy_1 = (X + jY)(x_2 + jy_2) = Xx_2 - Yy_2 + j(Xy_2 + Yx_2)$$

ce qui ramène à résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x_2 X - y_2 Y = x_1 \\ y_2 X + x_2 Y = y_1 \end{cases}$$

La solution du système nous donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Dans le cas où les nombres complexes sont donnés en forme polaires on aura :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

par suite :

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \quad (1.10)$$

En particulier

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad (1.11)$$

On déduit alors :

1. $\left| \prod_{n=1}^N z_n \right| = \prod_{n=1}^N |z_n| \iff |z_1 \times z_2 \times \dots \times z_N| = |z_1| \times |z_2| \times \dots \times |z_N|$
2. Il découle : $|z^n| = |z|^n$
3. $\arg\left(\prod_{n=1}^N z_n\right) = \sum_{n=1}^N \arg(z_n) \iff \arg(z_1 \times \dots \times z_N) = \arg(z_1) + \dots + \arg(z_N)$
4. $\arg(z^n) = n \arg(z)$
5. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

a) Propriétés de la multiplication

On vérifie simplement les propriétés suivantes : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

1. La multiplication des nombres complexes est commutative :

$$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$$

2. La multiplication des complexes est associative :

$$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times z_2 \times z_3$$

3. Le nombre 1 est l'élément neutre pour la multiplication :

$$1 \times z = z \times 1 = z$$

4. La multiplication dans \mathbb{C} est distributive par rapport à l'addition :

$$z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$$

5. Chaque nombre complexe non nul est inversible : $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists z' \in \mathbb{C}$ tel que :

$$z' \times z = 1 \implies z' = \frac{1}{z} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

1.3.5 Rotation

Soit $M(x, y)$ un point d'affixe $z = x + jy = re^{j\theta}$. Le vecteur \overrightarrow{OM} , caractérisé par z , est de module $|z| = r = |\overrightarrow{OM}|$ et il fait un angle θ avec l'axe des réels (Ox) tel que $\theta = \arg(z)$.

La multiplication par le nombre complexe $a = e^{j\alpha}$ nous donne le nombre $az = re^{j(\theta+\alpha)}$ tel nombre complexe caractérise le vecteur \overrightarrow{ON} de même module que \overrightarrow{OM} mais l'angle que fait \overrightarrow{ON} avec Ox est $(\alpha + \theta)$ ce qui veut dire que la multiplication par un nombre complexe de module 1 et d'argument α entraîne la rotation du vecteur image d'un angle α .

En particulier la multiplication par j entraîne une rotation de $\pi/2$ et la multiplication par (-1) entraîne la rotation de π .

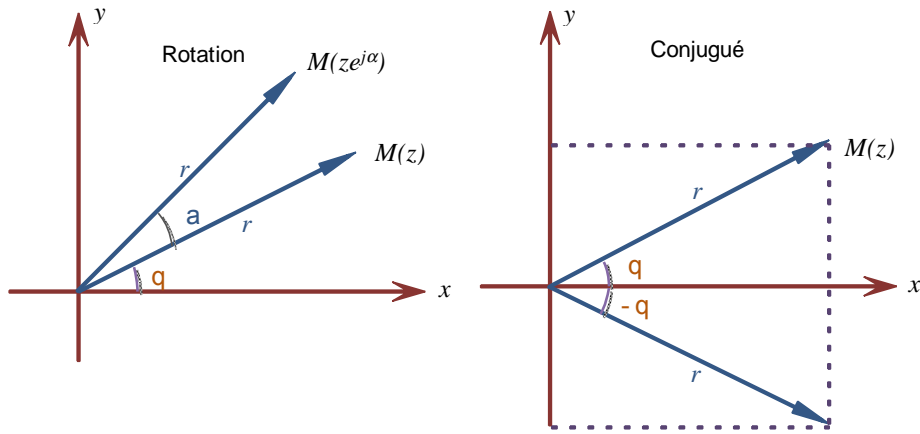


FIG. 1.2 – Rotation et conjugué

1.3.6 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.4 On appelle conjugué d'un nombre complexe $z = x + jy$ nombre complexe ayant même module que z mais d'argument opposé.

On note le conjugué par \bar{z} tel que : $\text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z)$ et $\text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$.

$$\bar{z} = x - jy = r(\cos \theta - j \sin \theta) = re^{-j\theta} \quad (1.12)$$

○ Si les points M et M' sont les images respectives des nombres complexes z et \bar{z} dans le plan complexe, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

a) Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. $\forall z \in \mathbf{C} : \overline{\bar{z}} = z$
2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C} : \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
3. $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C} : \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. $\forall z \in \mathbf{C} : \overline{z^n} = (\bar{z})^n$
5. $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C} : \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
6. $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2j}$
7. si $z = x + jy$ alors $z \times \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$



Dans la division des nombres complexes on introduit la notion de conjugué.
En multipliant par \bar{z}_2 le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2) \cdot (x_2 - jy_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + j(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = X + jY\end{aligned}$$

1.4 Formule de De Moivre

C'est une formule liant les nombres complexes en formes trigonométriques, mais elle trouve des applications importantes

Soit $z = e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ alors $z^n = (e^{j\theta})^n = (\cos \theta + j \sin \theta)^n$

or $(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta} = \cos n\theta + j \sin n\theta$, par comparaison on trouve :

$$(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos n\theta + j \sin n\theta \quad (1.13)$$

Cette formule s'appelle formule de De Moivre.

En utilisant la formule de De Moivre on peut déterminer de relations trigonométriques de types $\cos n\theta$ et fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

ä **Exemple 1.2** $(\cos \theta + j \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2j \cos \theta \sin \theta = \cos 2\theta + j \sin 2\theta$
Soit

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

ä **Exemple 1.3** $(\cos \theta + j \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3j \cos^2 \theta \sin \theta + j^3 \sin^3 \theta + 3j^2 \cos \theta \sin^2 \theta$
 $= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + j(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$
 $= \cos 3\theta + j \sin 3\theta$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ \sin 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta\end{aligned}$$

1.5 Racines d'un nombre complexe

Un nombre complexe ω est appelé racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe z si $\omega^n = z$ ou bien si $\omega = \sqrt[n]{z}$.

Si ω est de la forme : $\omega = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ et $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$, on a $\omega^n = z$ donc d'après la formule de De Moivre :

$$r(\cos \theta + j \sin \theta) = \rho^n(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = \rho^n(\cos n\varphi + j \sin n\varphi) \quad (1.14)$$

L'égalité dans \mathbb{C} entraîne : $\cos \theta = \cos n\varphi$ et $\sin \theta = \sin n\varphi$ donc $n\varphi = \theta + 2k\pi$ d'où :

$$\rho = \sqrt[n]{r} \text{ et } \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

avec $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

Donc φ peut prendre n valeurs : $\varphi_k ; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ (pour $k = n$ on retrouve φ_0).
par suite, dans \mathbb{C} , il existe n racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe z :

○

$$\begin{aligned} \omega_k &= \sqrt[n]{r} [\cos \varphi_k + j \sin \varphi_k] \\ \varphi_k &= \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{aligned} \quad (1.15)$$

à **Exemple 1.4** L'unité a deux racines carrées : $\omega_0 = 1$ et $\omega_1 = -1$ et trois racines cubiques :
en effet $z = 1$ est un nombre complexe de module $r = 1$ et d'argument $\theta = 0$
les racines cubiques sont ω_k avec $k = 0, 1$ et 2 .

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{0 + 2k\pi}{3}$$

donc :

$$\text{Pour } k = 0, \varphi_0 = 0 \implies \omega_0 = 1$$

$$\text{pour } k = 1, \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} \implies \omega_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Pour } k = 2, \varphi_2 = \frac{4\pi}{3} \implies \omega_2 = \left(\cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'une façon générale les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité sont données par la formule :

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + j \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.16)$$

1.6 Exercices

Exercice 1.1 Trouver l'ensemble des valeurs de z tels que :

$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$$

Exercice 1.2 Trouver les racines carrées de $z = -15 - 8j$ et en déduire les racines de l'équation $z^2 + (2j - 3).z + 5 - j = 0$.

Exercice 1.3 Si u est une racine de l'unité, autre que 1, et $u^n = 1$, Calculer :

$$E = 1 + u + u^2 + \dots + u^{n-1}$$

Exercice 1.4 :

1. Déterminer z de manière que $z, 1/z$ et $(1 - z)$ aient le même module.
2. Si z et z' sont deux nombres complexes de module 1, montrer que

$$\frac{z + z'}{1 + zz'}$$

est réel.

3. Si $z + \frac{1}{z} = 2 \cos t$ où t est un réel, calculer $z^n + \frac{1}{z^n}$.

Exercice 1.5 Soit

$$z = \frac{1 + j \tan \varphi}{1 - j \tan \varphi}$$

1. Calculer le module et l'argument de z .
2. En déduire les expressions de $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$ et $\tan 2\varphi$ en fonction de $\tan \varphi$.
3. Calculer $\tan(\pi/8)$
4. Utiliser ces résultats ainsi que le changement de variable $u = \tan(x/2)$, pour calculer

$$\text{l'intégrale } I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$$

Exercice 1.6 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z qui vérifient :

$$|1 + jz| = |1 - jz| \quad (\text{E})$$

Soit α un nombre réel. Montrer que les solutions z de l'équation (E) telles que :

$$\left(\frac{1 + jz}{1 - jz} \right)^n = \frac{1 + j\alpha}{1 - j\alpha}$$

sont des nombres réels.

Résoudre l'équation (E).

Exercice 1.7 m étant un paramètre réel, on considère le nombre complexe :

$$z_m = \frac{-\frac{1}{2} + m + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - m + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_m .
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la partie réelle de z_m est nulle.
3. Calculer le module et l'argument de z_m pour chacune des valeurs de m obtenues.
4. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z + j)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}z_{-1}$. (z_{-1} désigne z_m pour $m = -1$)

Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle

UN des thèmes importants de calcul différentiel est l'analyse des relations entre les grandeurs physiques ou mathématiques. Ces relations peuvent être décrites en termes de graphes, formules, données numériques, ou des mots. Dans ce chapitre, nous allons développer le concept d'une «fonction», qui est l'idée de base qui sous-tend presque toutes les relations mathématiques et physique, indépendamment de la forme sous laquelle elles sont exprimées. Nous allons étudier les propriétés de certaines des fonctions les plus élémentaires qui ont lieu dans l'analyse, y compris les polynômes, les fonctions trigonométriques, les fonctions trigonométriques inverses, les fonctions exponentielles et logarithmiques.

2.1 Notion de Variable

Dans le cas général, une variable peut marquer la place d'un nombre entier, d'un nombre réel, d'un point du plan ou de l'espace, d'une fonction, d'un ensemble etc. bref de tout objet mathématique.

Une variable est donc représente une grandeur, qui apparaît dans une expression et que l'on peut remplacer par une valeur numérique, elle prend ses valeurs parmi les éléments d'un certain ensemble des nombres réelles

2.1.1 Ensemble des nombres réels

La notion des nombres est l'une de notions les plus fondamentales en mathématiques.

On utilise les nombres pour évaluer des quantités ou de grandeurs en commerce, en physique et autres domaines.

Les nombres les plus familiers sont les entiers : 0, 1, 2, 3, 4, ... En gros on peut classer les nombres en deux catégories : *rationnels* et *irrationnels* :

Définition 2.1 Tout nombre (positifs ou négatifs) qui peut être mis sous la forme $\frac{a}{b}$ de deux entiers a et b est un nombre rationnel

à **Exemple 2.1** : $\frac{9}{13}, \frac{12}{17}, 1.5 = \frac{3}{2}, 2 = \frac{2}{1}, 0 = \frac{0}{1} \dots$

Les nombres rationnels peuvent être exprimés par des fractions décimales périodiques limitées ou illimitées :

ä **Exemple 2.2** : $\frac{1}{3} = 0.333\dots = 0.\bar{3}$, $\frac{120}{99} = 1.212\ 121\ 21$

Définition 2.2 Les nombres exprimés par des fractions décimales non périodiques illimitées sont des nombres irrationnels

ä **Exemple 2.3** : $\sqrt{2}, -\sqrt{5}, \pi, 1 + \sqrt{3}, \dots$

Définition 2.3 La collection des nombres rationnels et irrationnels constitue l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des nombres réels est ordonné, c'est-à-dire pour chaque couple (x, y) , une des relations suivantes est satisfaite :

$$x < y \ ; \ x = y \ ; \ x > y$$

On peut classer les nombres réels suivant la nature de ces nombres en plusieurs ensembles voici quelques ensembles importants :

Ensemble des entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, +\infty\}; \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$$

Ensemble des entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}; \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}; \quad \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$$

Ensemble des nombres quotients :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}; \quad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}; \quad \mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \geq 0, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Ensembles des nombres réels c'est l'ensemble de tous les nombres réels que se soit la nature :

$$\mathbb{R} = \{-\infty, \dots, +\infty\}; \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$x \in \mathbb{R}^+ \implies x \geq 0$$

On a :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Les nombres réels peuvent être représentés par des points sur un axe numériques sur lequel on choisit :

- Un point (O) origine représentant le nombre 0.
- Un sens positif indiquant le sens de croissance des nombres.

Souvent, l'axe numérique est une droite horizontale orientée de gauche à droite (figure1). Pour chaque nombre $x_1 > 0$ on associe un point M_1 qui se trouve à la distance $OM_1 = x_1$ à droite de O et pour chaque nombre $x_2 < 0$, le point M_2 se trouve à la distance $OM_2 = -x_2$ à gauche de O.

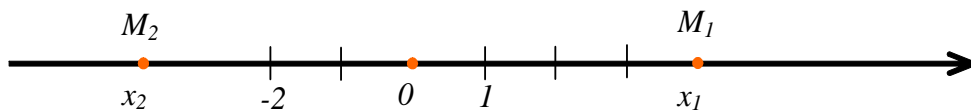


FIG. 2.1 – Axe des nombres réels

2.1.2 Valeur absolue

Définition 2.4 On appelle valeur absolue d'un nombre réel x la valeur numérique de la distance du point M qui représente le réel x sans considération la position relative à l'origine (à gauche ou à droite) on note : $|x|$ elle est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

On remarque que : $|x| \geq x$.

ä **Exemple 2.4** Si l'origine est considéré au niveau du sol et un point M_1 se trouve à 2 m au dessous du sol et un autre point M_2 à 2m au dessus du sol, dans les deux cas la distance au sol est 2m . on ne s'intéresse , alors, qu'à la **valeur absolue** 2. ($|2| = |-2| = 2$)

ä **Exemple 2.5**

$$|3| = 3 \quad |-0.01| = 0.01 \quad |-\sqrt{4}| = 2$$

$$|-\pi| = \pi \quad \left|-\frac{1}{7}\right| = \frac{1}{7}$$

Théorème 2.1 (Propriétés) Si x et y sont deux nombres réels alors on a :

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$
2. $|x - y| \geq |x| - |y|$
3. $|x \times y| = |x| \times |y|$
4. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

Démonstration :

Les deux dernières propriétés découlent de la définition. Démontrons les deux premières :

1. $|x| \geq x$ et $|y| \geq y$.

$$\text{Si } (x + y) > 0 \implies |x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

$$\text{Si } x + y < 0 \implies |x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$$

$$\text{Donc : } |x + y| \leq |x| + |y|$$

2. Posons $z = x - y \implies x = z + y$

$$|x| = |z + y| \leq |z| + |y| = |x - y| + |y| \implies |x - y| \geq |x| - |y|$$

2.1.3 Constantes et variables

En faisant des mesures durant un phénomène, nous établissons un ensemble des valeurs numériques d'une grandeur physique (longueur, masse, température,...etc. Certaines grandeurs conservent les valeurs numériques pendant le phénomène, on dit que c'est une grandeur *constante*. Alternativement, si la grandeur peut prendre plusieurs valeurs alors c'est une grandeur *variable*.

Définition 2.5 En mathématiques, on appelle *variable* toute grandeur susceptible de prendre différentes valeurs numériques.

2.1.4 Intervalles

Certaines grandeurs, tels que la date, sont discrètes, ce qui signifie qu'ils ne prennent que certaines valeurs isolées (les dates doivent être des entiers).

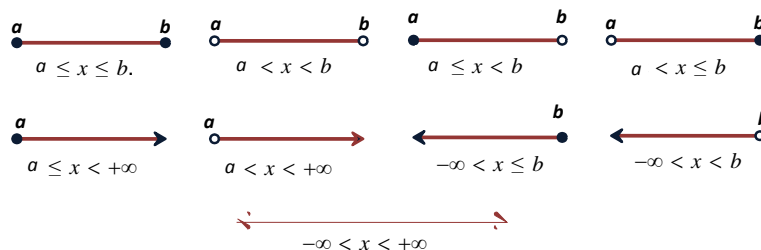


FIG. 2.2 – Représentation des intervalles

Autres quantités, telles que le temps, sont continues comme ils peuvent avoir n'importe quel nombre.

L'ensemble des valeurs numériques que peut prendre une variable continue dépend du caractère du problème considéré. Par exemple : la température de l'eau (dans son état liquide) ne peut prendre que des valeurs entre 0°C et 100°C . La variable $x = \cos \alpha$, pour

toutes les valeurs de α , est localisée entre -1 et $+1$. L'ensemble des valeurs d'une variable définit le domaine de définition de la variable ou autrement l'*intervalle* des valeurs de la variable.

Soient a et b deux nombres réels quelconques, on appelle intervalle (a, b) l'ensemble des nombres compris entre a et b . Parfois la variable peut prendre les valeurs de a ou b et parfois non. On distingue les types des intervalles suivantes :

- L'intervalle ouvert, qu'on note $]a, b[$ (ou parfois (a, b)) est l'ensemble des nombres x tels que : $a < x < b$.
- L'intervalle fermé ou segment qu'on note $[a, b]$ est l'ensemble des nombres x vérifiant $a \leq x \leq b$.
- L'intervalle fermé à gauche et ouvert à droite noté $[a, b[$ (ou $[a, b)$) est l'ensemble des nombres x tels que : $a \leq x < b$, on dit aussi que c'est un intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé).
- L'intervalle $]a, b]$ (ou $(a, b]$) est ouvert à gauche et fermé à droite et $a < x \leq b$.
- Les intervalles non bornés de \mathbb{R} sont :

$$[a, +\infty[;]a, +\infty[;]-\infty, b] ;]-\infty, b[;]-\infty; +\infty[$$

2.2 Fonction

De nombreux lois scientifiques et des principes de génie expliquent comment une quantité dépend de l'autre. Cette idée a été formalisée en 1673 par Gottfried Wilhelm Leibniz qui a inventé le terme de fonction pour indiquer la dépendance d'une quantité d'un autre

La température de l'eau chauffé dépend du temps d'échauffement, l'aire du disque dépend du rayon de sa circonférence.

La vitesse d'une voiture est une fonction de la quantité d'essence injectée dans le système du brûlement du moteur.

Le volume du son d'un appareil audio est une fonction de la position du potentiomètre.

La quantité d'électricité chargée dans un accumulateur est une fonction du temps du chargement.

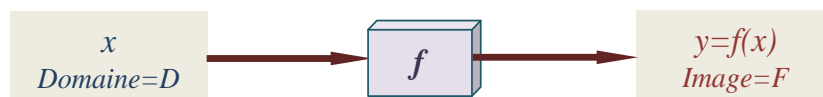
Dans tous ces cas on a donc une grandeur qui dépend de la valeur d'une autre grandeur on a donc une grandeur qui varie en **fonction** d'une autre.

Définition 2.6 En mathématiques, on dit qu'une grandeur y est une fonction de la grandeur variable x si à toute valeur de x choisie dans un ensemble convenable D , fait correspondre une valeur bien déterminée y d'un ensemble F .

Souvent, les valeurs de y sont définies par une règle ou une formule à l'aide de laquelle on peut calculer ces valeurs pour chaque valeur de x , cette règle de calcul est notée f (ou bien g, φ , etc)

L'expression : à la variable x d'un ensemble D , par l'application f on fait associer une valeur y d'un ensemble F ; $y = f(x)$ sera notée :

$$x \in D \xrightarrow{f} y \in F; y = f(x) \quad (2.2)$$



x est la variable ou l'argument, y est l'image, F est l'ensemble des valeurs de $f(x)$.

L'entrée est appelée la variable indépendante et la sortie est appelée la variable dépendante.

Définition 2.7 On appelle domaine de définition de la fonction $f(x)$, l'ensemble D des valeurs de x pour lesquelles les valeurs $y = f(x)$ associées sont finies et bien déterminées.

ä **Exemple 2.6** $x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction définie pour $x \neq 0$ c.à.d $D = \mathbb{R} - \{0\}$ et $F = \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie pour $1 - x^2 \geq 0 \implies$ si $1 \geq x^2$ c.à.d $D = [-1, 1]$

Remarque 2.1

Quand on définit la notion de fonction, on admet parfois qu'à chaque valeur de x prise dans un certain domaine correspond non pas une valeur de y , mais plusieurs ou même une infinité. Dans ce cas, la fonction est dite *multivoque*, tandis que la fonction précédemment définie est dite *univoque*.

Par la suite, nous conviendrons d'appeler fonctions uniquement celles qui sont **univoques**.

Si dans certains cas nous avons affaire à des fonctions multivoques, nous le spécifierons chaque fois pour éviter toute confusion

2.2.1 Représentation des fonctions

Il y a quatre façons possibles de représenter une fonction :

- **Verbale** : C'est une description en mots, par exemple $P(t)$ est la population d'une région à l'instant t
- **Numérique** : La fonction est donnée sous formes d'un tableau où on dispose dans un certain ordre les valeurs de la variable indépendante $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ et les valeurs correspondantes de la fonction y_1, y_2, \dots, y_n .

x	x_1	x_2	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	x_n
y	y_1	y_2	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	y_n

- **Représentation graphiques** : On associe à une fonction $f(x)$ une représentation géométrique ou graphique.

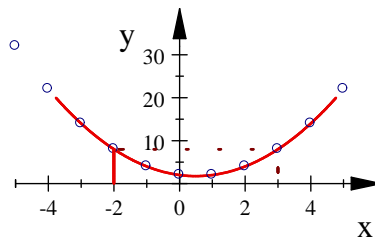


FIG. 2.3 – Graphe d'une fonction

La relation $y = f(x)$ est représentée à l'aide d'un ensemble des points $M(x, y)$ du plan xOy ; Ox et Oy étant un système d'axes de référence; les valeurs de la variable indépendante sont les abscisses de ces points (x), les valeurs de la fonction y sont les ordonnées correspondantes. L'ensemble des points obtenus constitue le graphe de $f(x)$ (figure 3).

- **Expression analytiques** : la fonction est donnée sous formes d'une formule liant la variable indépendante x à la variable dépendante y

Si une même fonction peut être représentée dans ces quatre manières, il est souvent utile d'aller d'une représentation à une autre pour obtenir des informations supplémentaires sur la fonction.

2.2.2 Représentation analytiques des fonctions

Une expression analytique est la notation symbolique de l'ensemble des opérations mathématiques connues que l'on doit appliquer dans un certain ordre à des nombres et des lettres exprimant des grandeurs constantes ou variables

Si la dépendance fonctionnelle $y = f(x)$ est telle que f est une expression analytique, nous disons que la fonction $f(x)$ est donnée analytiquement

ä **Exemple 2.7** $f(x) = x^3 + 2x + 2$ $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$

$$h(x) = \sqrt{\frac{2x}{x^4 + 1}}, \quad g(x) = 5 \sin x + 3,$$

L'expression analytique d'une fonction est, en fait, une expression des fonctions élémentaires (ou fonctions de bases) obtenue par des opérations usuelles comme dans le cas des nombres : addition, soustraction, multiplication, ou division.

On peut hiérarchiser les fonctions numériques suivant leur degré de complexité, c'est à dire suivant la difficulté (moyenne) à calculer l'image d'un élément quelconque.

- Au bas de l'échelle nous trouvons les fonctions qui n'impliquent que des additions et des multiplications. Ce sont ces fonctions que nous avons qualifiées de 'polynomiales'.
- Immédiatement au dessus, nous trouvons les fonctions pour lesquelles un calcul d'inverse (une division) est nécessaire. Ce sont les fonctions dites 'rationnelles' qui apparaissent comme des quotients de deux polynômes.
- Viennent ensuite les fonctions nécessitant une extraction de radicaux, fonctions parfois qualifiées "d'irrationnelles".

Alors on distingue les fonctions dites algébriques et les fonctions non algébriques

Définition 2.8 Une fonction est dite algébrique si sa valeur peut être calculée pour n'importe quelle valeur de la variable x , du domaine de définition, par un nombre fini des opérations algébriques élémentaires.

Les fonctions polynômes, rationnelles et irrationnelles sont des fonctions algébriques.

Définition 2.9 Une fonction non algébrique est dite **transcendante**.

Les fonctions transcendantes usuelles sont les fonctions trigonométriques, hyperboliques, logarithmiques et exponentielles.

a) Fonction polynôme

C'est une fonction de la forme

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

où a_0, a_1, \dots, a_n sont des nombres constants appelés coefficients ; n est un entier positif que l'on appelle degré du polynôme. Il est évident que cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x , c'est-à-dire qu'elle est définie dans un intervalle infini.

ä Exemple 2.8 :

1. $y = ax + b$ est une fonction linéaire. Quand $b = 0$, cette fonction exprime une dépendance entre x et y telle que ces deux variables sont proportionnelles. Quand $a = 0, y = b$, la fonction est constante.
2. $y = ax^2 + bx + c$ est une fonction du second degré. Le graphique de cette fonction est une parabole.

b) Fonction rationnelle

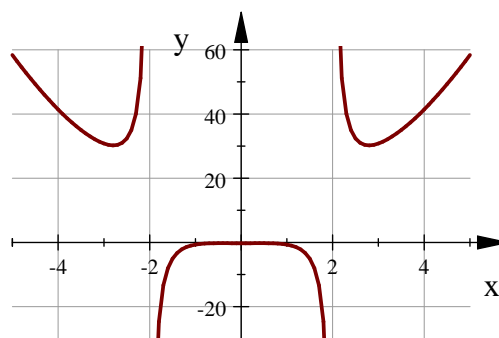
Toute fonction de la forme

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

est une fonction rationnelle, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes.

Le domaine de définition est l'ensemble des valeurs de x telles que $Q(x) \neq 0$.

ä Exemple 2.9 $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$ est une fonction rationnelle, définie si $x^2 - 4 \neq 0$ donc le domaine de définition est l'ensemble des valeurs de x telles que $x \neq \pm 2$. Alors le domaine de définition est $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ou bien $D =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$



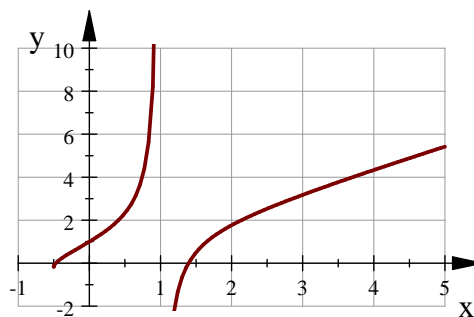
Graph de $\frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

c) Fonctions irrationnelles

On dit que la fonction $y = f(x)$ est irrationnelle si $f(x)$ est le résultat des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et d'élevation à une puissance rationnelle non entière.

ä **Exemple 2.10** $y = \sqrt{x}$ est une fonction irrationnelle définie si $x \geq 0$ alors \mathbb{R}^+ est le domaine de définition.

ä **Exemple 2.11** $y = \frac{x^2 - \sqrt{2x+1}}{x-1}$ cette fonction est définie si $x \neq 1$ et si $2x+1 \geq 0$
 $D =]-\frac{1}{2}, 1[\cup]1, +\infty[$

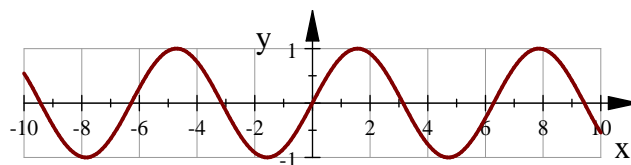


d) Les fonction trigonométriques

■ Fonction cosinus

$f(x) = \sin x$ est une fonction **transcendante** périodique de période 2π , $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$;
 $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin x$ est bornée $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $\sin x = 0$ pour $x = k\pi$.

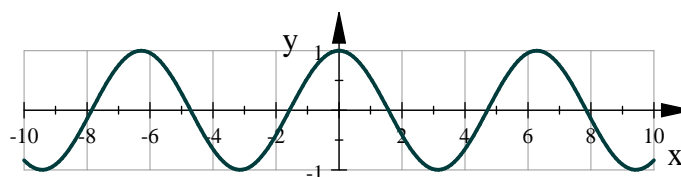


$\sin x$

■ Fonction cosinus

$f(x) = \cos x$ est une fonction **transcendante** périodique de période 2π , $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$;
 $k \in \mathbb{Z}$.

$f(x) = \cos x$ est bornée $-1 \leq \cos x \leq 1$, $\cos x = 0$ si $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

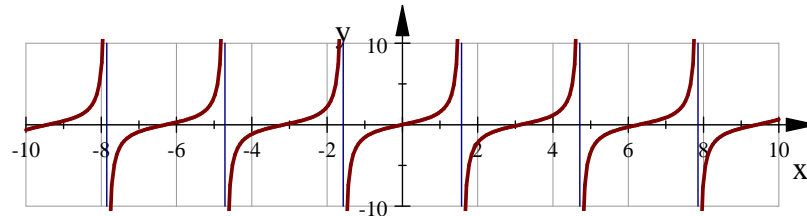


$\cos x$

■ Fonction tangente

Elle est définie par $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, elle est périodique de période π , $\tan(x) = \tan(x + k\pi)$.

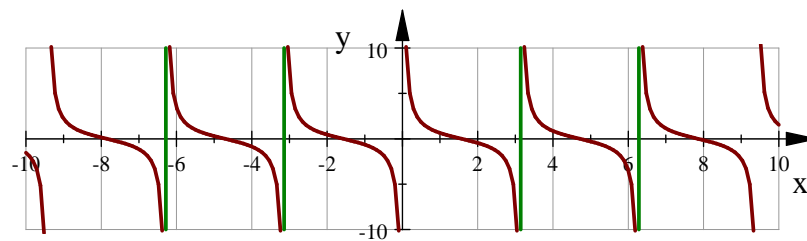
La fonction $\tan(x)$ est non-bornée $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$ et $\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty$ et $\tan x = 0$ pour $x = k\pi$.



tan x

■ Fonction cotangente

C'est la fonction définie par $\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$ elle est aussi non bornée. Les asymptotes de $\cot(x)$ sont les droites $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$



cot x

e) Fonctions exponentielles

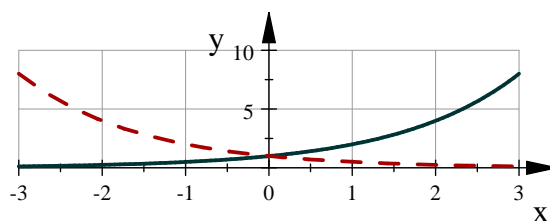
Définition 2.10 La fonction exponentielle de base a est définie par $f(x) = a^x$ avec $a > 0$.

Pour $a > 1$ c'est une fonction strictement croissante et elle est strictement décroissante pour $0 < a < 1$.

$f(0) = a^0 = 1$ et on a :

$$\begin{aligned} a^x \times a^y &= a^{x+y} \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ (ab)^x &= a^x b^x \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Voici la courbe de 2^x (courbe solide) et de 2^{-x} (pointillée) :

graphes de 2^x et 2^{-x}

La fonction $f(x) = e^x$ est un cas particulier avec $e = 2,7183$, elle possède les mêmes propriétés précédentes.

$$\begin{aligned} e^x \times e^y &= e^{x+y} \\ e^x / e^y &= e^{x-y} \\ (e^x)^a &= e^{ax} \\ \sqrt[n]{e^{ax}} &= e^{\frac{ax}{n}} \\ e^x &> 0 ; \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

f) Fonction logarithme

Définition 2.11 On définit la fonction logarithme comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle (a^x) ; on note $f(x) = \log_a(x)$ et on lit : fonction logarithme de base a .

La fonction logarithme naturelle est la fonction $\ln(x)$ fonction réciproque de e^x ou la primitive de $\frac{1}{x}$.

$$y = \log_a x \iff x = a^y \quad (2.5)$$

$\log_e x = \ln x$ et $\log_{10} x = \log x$

On a les propriétés suivantes :

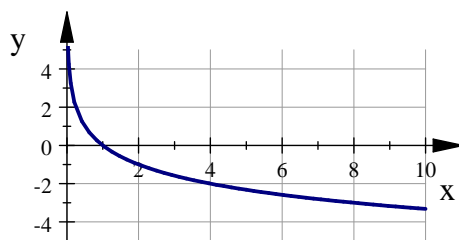
$$\begin{aligned} \log_a(x \times y) &= \log_a x + \log_a(y) \\ \log_a(x^n) &= n \log_a x \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a 1 &= 0 \\ \log_a a &= 1 \\ \log_a a^x &= x \\ a^{\log_a x} &= x \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pour passer de la base a à la base b il suffit de connaître $\log_a b$:

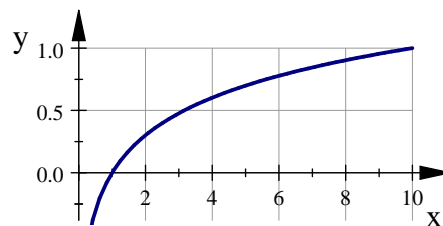
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad (2.7)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \log_a x &= \frac{\ln x}{\ln a} \\ \ln x &= \frac{\log_a x}{\log_a e} = \ln a \times \log_a x \\ a^x &= e^{(x \ln a)} \end{aligned} \quad (2.8)$$



$\log_{1/2} x$



$\log_{10} x$

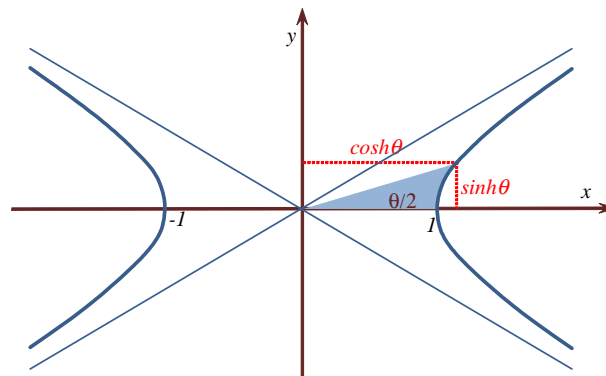
g) Fonctions hyperboliques

En mathématiques, on appelle fonctions hyperboliques les fonctions *cosinus hyperbolique*, *sinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique*.

Les noms de sinus, cosinus et tangente proviennent de leur ressemblance avec les fonctions trigonométriques (dites « circulaires ») et le terme de hyperbolique provient de leur relation avec l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$

Elles sont utilisées en analyse pour le calcul intégral, la résolution des équations différentielles mais aussi en géométrie hyperbolique.

Une demi-droite passant par l'origine intersecte l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ au point $(\sinh \theta, \cosh \theta)$ où θ est le double de l'aire algébrique de la surface délimitée par la demi-droite, l'hyperbole et l'axe des x^1

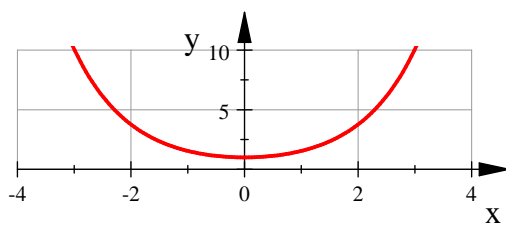


Définition 2.12 Sinus hyperbolique : Définie comme étant la partie impaire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par

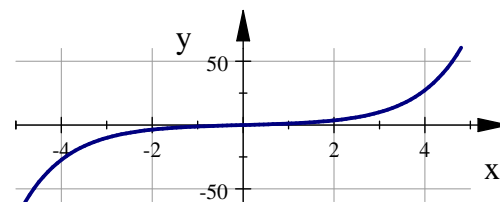
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Définition 2.13 Cosinus hyperbolique : Définie comme étant la partie paire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$\cosh x$

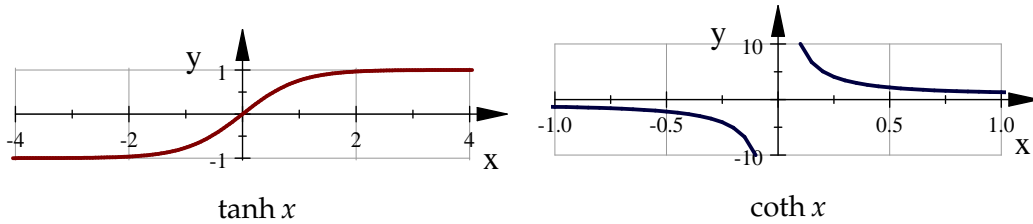


$\sinh x$

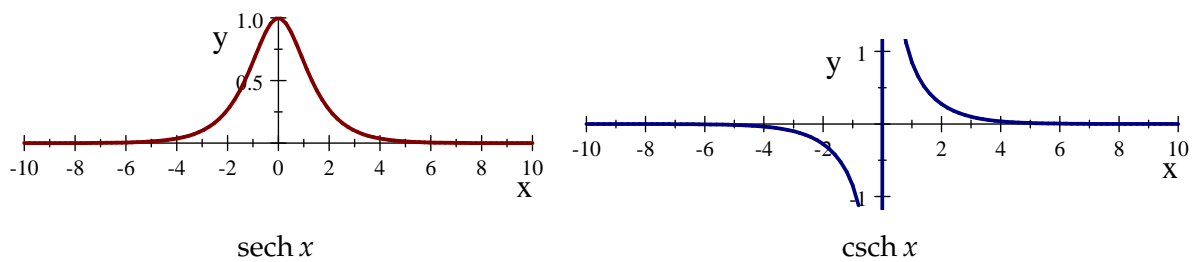
Définition 2.14 Tangente hyperbolique : Définie par

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

¹Extrait de wikipedia



Autres fonctions hyperboliques : cotangente hyperbolique : $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$
 cosecante hyperbolique : $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$ et secante hyperbolique : $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$



On a les identités principales suivantes :

$$\begin{aligned} \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \sinh(-x) &= -\sinh x & \cosh(-x) &= \cosh x \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 & 1 - \tanh^2 x &= \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

2.2.3 Classifications des fonctions

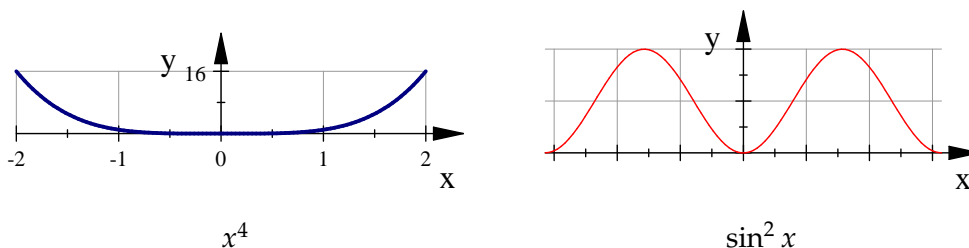
a) Fonctions paires et impaires

Définition 2.15 On dit qu'une fonction $f(x)$ est une fonction paire si :

$$\forall x \in D, f(-x) = f(x)$$

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Oy : deux points d'abscisses opposées ont même ordonnée.

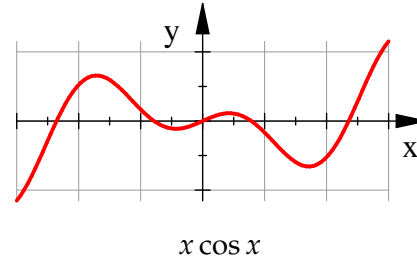
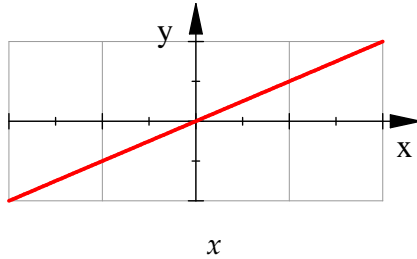
par exemple : les fonctions x^{2n} , $\sin^2 x$, $\cos x$, ...



Définition 2.16 Une fonction $f(x)$ est impaire si :

$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$$

Le graphe d'une telle fonction admet l'origine comme centre de symétrie.
par exemple : les fonctions $x^{2n+1}, \sin(x), \tan(x) \dots$



b) Fonction périodique

Définition 2.17 On dit qu'une fonction $f(x)$ est périodique s'il existe un nombre positif T tel que :

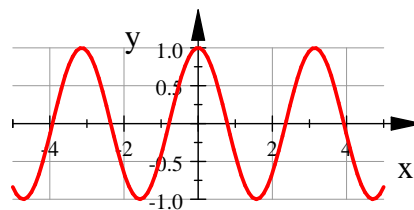
$$f(x) = f(x + T)$$

T est la période de la fonction $f(x)$.

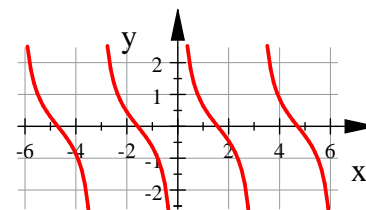
Et on peut vérifier que si k est un entier quelconque kT est également une période de $f(x)$. Cependant lorsqu'on parle de période, on sous entend la plus petite de toutes les périodes.

Les fonctions $\sin \omega x$ et $\cos \omega x$ sont des fonctions périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Les fonctions $\tan \omega x$ et $\cot \omega x$ sont des fonctions périodiques de période $T = \frac{\pi}{\omega}$.



$\cos 2x$ avec $T = \pi$



$\cot x$

c) Fonction convexe

Définition 2.18 On dit qu'une fonction $f(x)$, définie sur $[a, b]$ est convexe sur $[a, b]$, si pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de $[a, b]$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

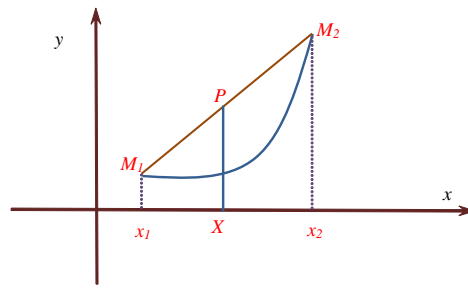


FIG. 2.4 – Concavité

En observant que le point P de coordonnées :

$$X = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, Y = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

n'est autre que le barycentre des points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ affectés des coefficients λ et $1 - \lambda$, point d'abscisse X sur la droite M_1M_2 , on voit qu'on peut écrire : $f(x) \leq Y$ et l'arc M_1M_2 est au-dessous de la corde M_1M_2 . L'arc M_1M_2 est concave vers les $y > 0$ (figure 3).

d) Fonctions Monotones

Définition 2.19 On dit que la fonction $f(x)$ est strictement croissante ou monotone croissante sur l'intervalle $[a, b]$ si :

$$\forall x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1) \iff f(x_2) - f(x_1) > 0$$

Définition 2.20 Une fonction est croissante sur $[a, b]$ si :

$$\forall x_2 > x_1 \implies f(x_2) \geq f(x_1) \iff f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

Définition 2.21 Une fonction $f(x)$ est strictement décroissante ou monotone décroissante sur $[a, b]$ si :

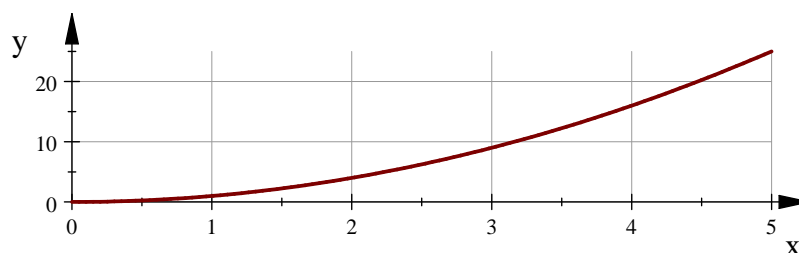
$$\forall x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1) \iff f(x_2) - f(x_1) < 0$$

Définition 2.22 Une fonction elle est décroissante si :

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) \leq f(x_1) \iff f(x_2) - f(x_1) \leq 0$$

ä Exemple 2.12 :

1. $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$



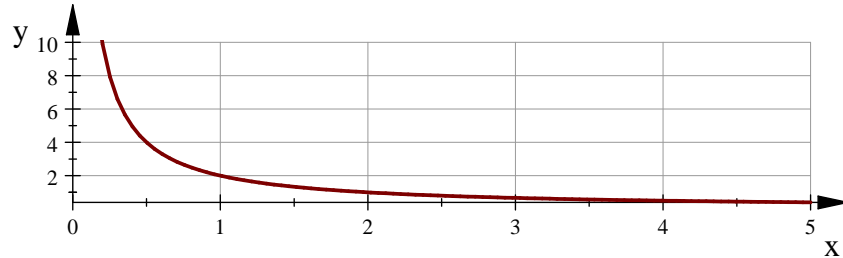
En effet :

Soient $x_2, x_1 \in [0, +\infty[$ et $x_2 \geq x_1$.

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

$x_2 + x_1 \geq$ et $x_2 - x_1 \geq 0$ donc $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$.

2. $f(x) = \frac{2}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$



Soient $x_2, x_1 \in]0, +\infty[$

$$\text{Si } x_2 \geq x_1 \implies \frac{2}{x_2} \leq \frac{2}{x_1} \iff f(x_2) \leq f(x_1)$$

e) Fonctions bornées, Extremums

Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans un domaine D

Définition 2.23 On dit que f est **majorée** sur D , si $f(D)$ est une partie majorée de \mathbb{R} , c'est à dire : f majorée sur D si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \leq M$$

Dans ce cas, on appelle borne supérieure de f sur l'intervalle D , noté $\sup_D(f)$, le plus petit majorant de f .

Définition 2.24 On dit que f est **minorée** sur D , si $f(D)$ est une partie minorée de \mathbb{R} , c'est à dire : f minorée sur D si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \geq m$$

Dans ce cas, on appelle borne inférieure de f sur l'intervalle D , noté $\inf_D(f)$, le plus grand minorant de f .

Définition 2.25 On dit que f est **bornée**, si f est à la fois majorée et minorée. f est donc bornée s'il existe deux réels M et m tels que

$$\forall x \in D : m \leq f(x) \leq M$$

Soient f et g deux fonctions définies sur le même domaine D

1. La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée : $|f(x)| \leq M, \forall x \in D$

2. Si f et g sont majorées, alors $(f + g)$ est majorée et

$$\sup_D (f + g) \leq \sup_D (f) + \sup_D (g)$$

3. Si f et g sont minorées, alors $(f + g)$ est minorée et

$$\inf_D (f + g) \geq \inf_D (f) + \inf_D (g)$$

4. f est majorée si et seulement si $(-f)$ est minorée : $\inf_D (-f) = -\sup_D (f)$

5. f est minorée si et seulement si $(-f)$ est majorée : $\sup_D (-f) = -\inf_D (f)$

6. Soit un réel $a > 0$, Si f est majorée, alors αf est majorée et $\sup_D (\alpha f) = \alpha \sup_D (f)$

7. Si f est minorée, alors αf est minorée et $\inf_D (\alpha f) = \alpha \inf_D (f)$

8. Si f et g sont bornées sur D alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha f + \beta g)$ est bornée sur D .

Définition 2.26 Soient f une fonction définie sur le domaine D et $x_0 \in \mathbb{R}$
On dit que f présente un maximum global en x_0 si $\forall x \in D : f(x) \leq f(x_0)$

Définition 2.27 Soient f une fonction définie sur le domaine D et $x_0 \in \mathbb{R}$
On dit que f présente un minimum global en x_0 si $\forall x \in D : f(x) \geq f(x_0)$

○ Dans l'un de ces deux cas, on dit que f présente un extremum global en x_0

Remarque 2.2

1. f présente un maximum global en $x_0 \iff \sup_D (f) = f(x_0)$. On dit que f atteint sa borne supérieure en x_0 .
2. f présente un minimum global en $x_0 \iff \inf_D (f) = f(x_0)$. On dit que f atteint sa borne inférieure en x_0 .

ä **Exemple 2.13** Soit $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4}$

On a $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ donc $\frac{4}{x^2 + 4} > 0 \implies \inf_{\mathbb{R}} (f) = 0$

de plus, $x^2 + 4 \geq 4$ d'où : $\frac{4}{x^2 + 4} \leq 1 \implies \sup_{\mathbb{R}} (f) = 1$

Finalement, $f(x)$ est bornée et $0 < \frac{4}{x^2 + 4} \leq 1$

2.2.4 Construction des fonctions

La plupart des fonctions qu'on rencontre sont construites à partir des fonctions simples. Ce processus de construction est réalisée en utilisant l'arithmétique et d'autres opérations.

Pour une ou de plusieurs fonctions données on peut par combinaison trouver des autres fonctions

a) Construction par opérations élémentaires

On a noté que les fonctions peuvent additionner ($f + g$), soustraire ($f - g$), multiplier ($f \times g$), ou diviser (f/g) entre eux, ces opérations nous donnent des autres fonctions :

1. Addition : $h = f + g$

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

2. Soustraction : $s = f - g$

$$s(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

3. Multiplication par un nombre : si α est un réel et $f(x)$ est une fonction donnée :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

4. Combinaison linéaire : Si $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sont des fonctions données, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels, alors on peut construire une fonction de la forme

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x)$$

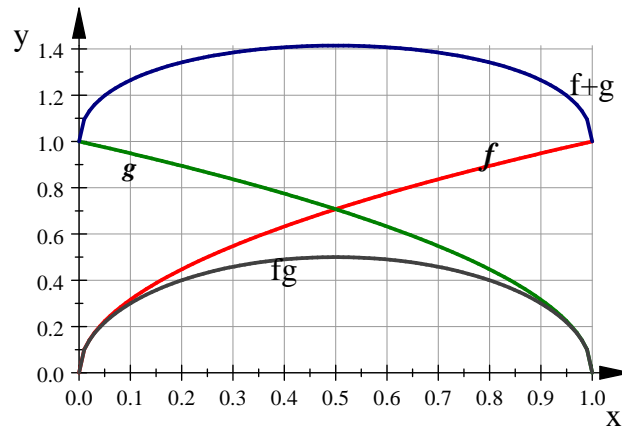
5. Multiplication : $m = f \times g$

$$m(x) = (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

6. Division : $d = \frac{f}{g}$

$$d(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

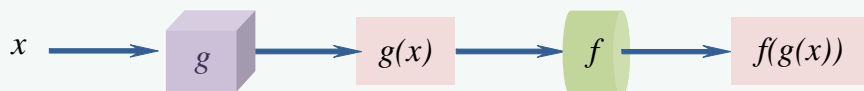
ä **Exemple 2.14** $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{1-x}$
 $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ $(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$
 $(fg)(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{1-x}$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$



b) Composition des fonctions

Définition 2.28 Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions à une même variable réelle x . On appelle fonction composée de f et g la fonction $h(x)$ définie par :

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$



en effet si on pose $t = g(x)$ alors $h(x) = f(g(x)) = f(t)$, donc $(f \circ g)(x)$ est l'image par f de l'image par g , tandis que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

ä **Exemple 2.15** soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 1 - x^2$

$$f(\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - f^2(x) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x$$

c) Translation

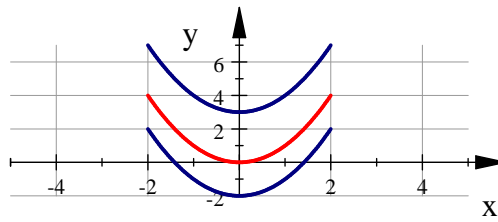
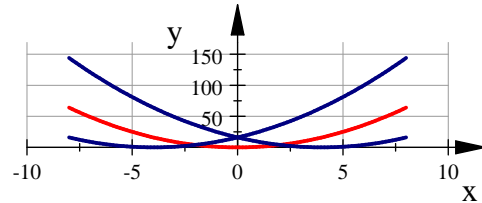
Soit $y = f(x)$ une fonction donnée. Si on ajoute à $f(x)$ une constante k alors le point $M_0(x_0, y_0)$ se déplace vers le point $M_1(x_0, y_0 + k)$ par suite la courbe de $f(x)$ subit une translation verticale.

Mais si on ajoute une constante h à x , le point $M_0(x_0, y_0)$ se déplace vers $M_2(x_0 + h, f(x_0 + h))$ alors la courbe subit une translation horizontale.

ä **Exemple 2.16** $f(x) = x^2$

Les courbes de $x^2 + 1, x^2 - 1, x^2 + 2, \dots$ sont traduites verticalement

Les courbes de $(x + 1)^2, (x - 1)^2, \dots$ se traduisent horizontalement

Les courbes de $x^2 + 3$, x^2 et $x^2 - 2$ courbes de x^2 , $(x + 4)^2$ et $(x - 4)^2$

d) Fonction définie par parties

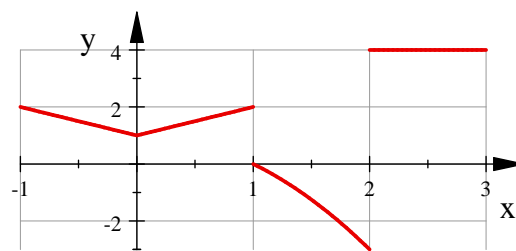
Définition 2.29 Une fonction définie par parties (ou par morceaux) est une fonction dont la loi de correspondance diffère selon les valeurs de la variable indépendante.

ä **Exemple 2.17** La fonction valeur absolue est une fonction définie par parties

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

ä **Exemple 2.18** Soit la fonction

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



2.3 Notion de limite

La notion de limite d'une variable va jouer un rôle fondamental, étant intimement liée aux notions de base de l'analyse mathématique : la dérivée, l'intégrale, etc.

Chercher la limite d'une fonction, c'est de déterminer si cette fonction s'approche d'une valeur particulière lorsque la variable prend des valeurs extrêmes au voisinage des points bien déterminés. Dans cette définition très intuitive, deux notions restent à définir avec précision : la notion de « s'approcher » et celle de « valeur extrême ».

Historiquement, les mathématiques se sont d'abord intéressées aux limites de suites : on cherchait à savoir si, pour les grandes valeurs de l'indice, les termes de la suite se rapprochaient d'une valeur particulière, c'est-à-dire si, à partir d'un certain rang, on était aussi proche que l'on veut de cette valeur particulière. La notion « être proche » signifie alors « être dans un voisinage arbitrairement choisi ».

Pour pouvoir manipuler la notion de limite et l'exploiter sans erreur, il a été nécessaire de la définir de manière plus précise et plus formelle.

2.3.1 Voisinage d'un point

Définition 2.30 On appelle voisinage, de module δ (infinitement petit) du point $M_0(x_0, y_0)$ l'ensemble des points $M(x, y)$ très proches du point M_0 , c'est-à-dire la distance MM_0 est inférieure ou égale à δ .

Souvent on choisit le voisinage du point M_0 comme un cercle de centre M_0 et de rayon δ , mais le voisinage peut être en n'importe quelle forme géométrique.

Si les points M et M_0 sont caractérisés par les vecteurs

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x \vec{i} + y \vec{j} \\ \overrightarrow{OM_0} &= x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}\end{aligned}\quad (2.9)$$

alors que le vecteur $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0) \vec{i} + (y - y_0) \vec{j}$ est le vecteur joignant ces deux points et son module est égal à la distance entre M et M_0 soit :

$$d(M, M_0) = \|\overrightarrow{M_0M}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (2.10)$$

Si cette distance est infinitement petite c'est-à-dire $d(M, M_0) \leq \delta$ alors M se trouve au voisinage de M_0 et dans notre cas les points du voisinage de M_0 sont à l'intérieur du disque (Fig. 5) de centre M_0 et de rayon $r = \delta$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2 \quad (2.11)$$

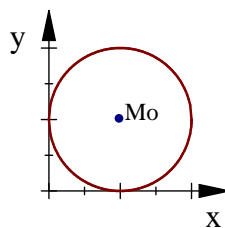
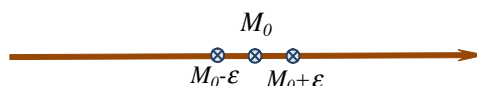


FIG. 2.5 – Voisinage

○ Si le point M_0 est un point d'un axe (soit $x'Ox$), le voisinage de M est donc le segment (a, b) de centre x_0 ; $M_0(x_0)$



2.3.2 Tangente

Tangente vient du latin *tangere*, **toucher** : en géométrie, la tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui « touche » la courbe au plus près au voisinage de ce point. La courbe et sa tangente forment alors un angle nul en ce point.

La notion de tangente permet d'effectuer des approximations : pour la résolution de certains problèmes qui demandent de connaître le comportement de la courbe au *voisinage d'un point*, on peut assimiler celle-ci à sa tangente. Ceci explique la parenté entre la notion de tangente et le calcul différentiel.

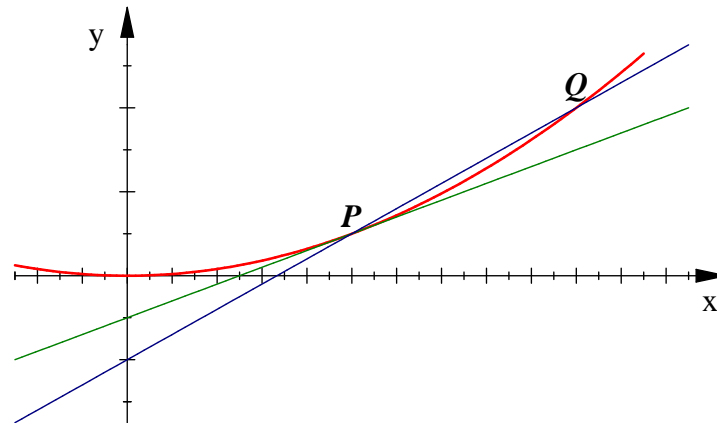


FIG. 2.6 – Notion de tangente

Considérons une courbe (C) d'une fonction $y = f(x)$ et soit $P(x_0, y_0)$ et $Q(x_1, y_1)$ deux points de (C) (Figure 6). La pente de la droite passant par P et Q est définie par :

$$m_{PQ} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Cette droite coupe la courbe (C) en deux points. En déplaçant le point Q vers le point P, la droite change sa pente et lorsque Q sera au voisinage de P, la droite presque touche la courbe, donc elle est tangente à (C). La valeur de pente de la droite PQ, dans ce cas, prend une valeur qu'on l'appelle valeur limite. On note $\lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = m$.

Cette notion, de limite, peut être généralisée pour les fonctions.

Notons, d'autre part, qu'à côté de cette notion de limite on parle aussi de la notion de *vitesse du déplacement* du point Q vers le point P, et qui sera l'objet du chapitre suivant.

2.3.3 Limite en un point

Dans le paragraphe précédent, on a traité la notion de la limite du point de vue géométrique. Le déplacement du point Q (y_1, x_1) vers P (x_0, y_0) s'accompagne du déplacement des coordonnées (y_1, x_1) vers les coordonnées (x_0, y_0) . Dans la suite, on va discuter la valeur que peut atteindre $y = f(x)$ lorsque la valeur de x tend vers une valeur fixée x_0 .

Définition 2.31 Soit $f(x)$ une fonction de la variable x définie sur l'intervalle $[a, b]$ sauf éventuellement pour la valeur x_0 . On dit que $f(x)$ a pour limite ℓ lorsque x tend vers x_0 . Si, pour tout voisinage (V_ℓ) de ℓ , de module ε , on peut associer un voisinage (V_0) de x_0 de module δ tels que, pour $x \in V_0$ on aura $f(x) \in V_\ell$, ça veut dire que la valeur de $f(x)$ est proche de ℓ autant que la valeur de x est proche de x_0

Autrement dit :

$f(x)$ tend vers une **limite** ℓ lorsque x tend vers x_0 si, à tout nombre positif ε infiniment petit, il est possible de faire correspondre un nombre $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ et on utilise les notations suivantes :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad (2.12)$$

ou, plus simplement, on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad (2.13)$$

a) Interprétation graphique de la définition de limite

Soit (C) le graphe de la fonction $f(x)$ (figure 7) et soient deux droites D et D' parallèles à Ox et d'ordonnées $\ell + \varepsilon$ et $\ell - \varepsilon$ et deux droites Δ et Δ' parallèles à Oy et d'abscisse $x_0 - \delta$ et $x_0 + \delta$.

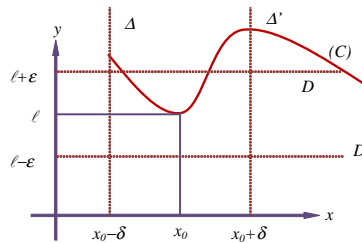


FIG. 2.7 – Interprétation géométrique de la limite

La définition de la limite ci-dessus signifie que le nombre ε étant donné, il est possible de déterminer le nombre positif δ de sorte que tout point de la courbe C situé entre les droites Δ et Δ' soit également situé entre D et D' .

ä **Exemple 2.19** Soit la fonction $f(x) = 2x - 1$; Si $x_0 \rightarrow 2 \implies f(x) \rightarrow 3$. Supposons que nous choisissons $\varepsilon = 10^{-6}$, quelle valeur correspond pour δ ?

$$f(x) \rightarrow 3 \iff |f(x) - 3| < \varepsilon \text{ soit } |2x - 4| < \varepsilon \text{ donc } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Par conséquent chaque valeur inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ convient pour δ .

b) Limites à gauche et à droite

Considérons un point x_0 de l'axe réel (figure 8), tout point x à gauche de x_0 est plus petit que x_0 .

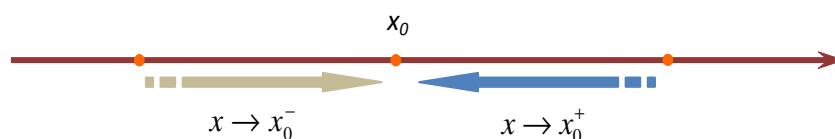


FIG. 2.8 – Limites à gauche et à droites

Quand x se déplace vers x_0 on dit que x tend vers x_0 par valeurs inférieures à x_0 on note :

$$x \rightarrow x_0^- \iff x \rightarrow x_0 ; x < x_0$$

De même pour les points à droite : x tend vers x_0 par valeur supérieures :

$$x \rightarrow x_0^+ \iff x \rightarrow x_0 ; x > x_0$$

Une fonction peut avoir deux limites différentes lorsque x tend vers x_0 par valeurs supérieures à x_0 (limite à droite) ou par valeurs inférieures à x_0 (limite à gauche).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) &= \ell_1 \text{ limite à droite} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= \ell_2 \text{ limite à gauche} \end{aligned} \quad (2.14)$$

On dit que la fonction $f(x)$ admet une limite ℓ au point x_0 si, et seulement si, $\ell = \ell_1 = \ell_2$ c'est-à-dire si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (2.15)$$

ä **Exemple 2.20** La fonction $f(x) = 1 + \frac{|x|}{x}$; $f(x)$ est défini $\forall x \neq 0$.

Si $x > 0$ alors x tend vers zéro par valeurs positives et $|x| = x$ nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 + 1 = 2$$

Si $x < 0$ alors x tend vers zéro par valeurs négatives et $|x| = -x$ nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 - 1 = 0$$

Les limites à droite et à gauche pour la valeur 0 sont distinctes. donc $f(x)$ n'a pas une limite au point 0.

2.3.4 Extensions de la notion de limite

Définition 2.32 On dit que la fonction $f(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers x_0 , si en donnant à x des valeurs assez proches de x_0 on rend $f(x)$ aussi grand que l'on veut.

Plus précisément, si nous désignons par A un nombre positif arbitrairement grand nous dirons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 si, $\forall A > 0$ arbitrairement grand, il est possible de trouver un nombre $\delta > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \delta \implies f(x) > A \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (2.16)$$

De même $f(x) \rightarrow -\infty$, lorsque $x \rightarrow x_0$ si, à toute valeurs $A > 0$ et arbitrairement grande, on peut faire correspondre une valeur η telle que :

$$|x - x_0| < \eta \implies f(x) < -A \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad (2.17)$$

Remarque 2.3

L'écriture $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ne signifie pas que la limite de $f(x)$ existe et égale à $+\infty$, car $+\infty$ n'est pas un nombre bien défini, autrement, il n'y a pas un nombre réel $+\infty$, mais on dit que lorsque x se rapproche de x_0 , la valeur $f(x)$ devient arbitrairement grande et positive.

De même $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, la valeur $f(x)$ devient arbitrairement grande et négative si x est proche de x_0

a) Asymptotes

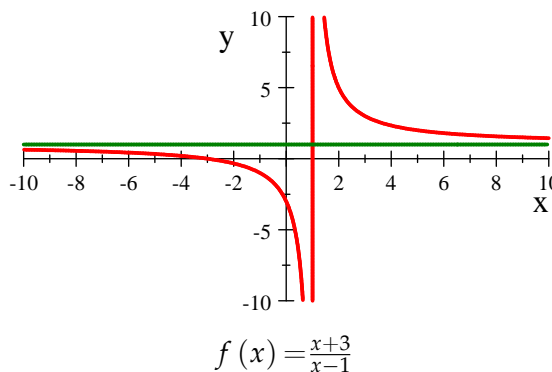
Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{x-a}$. On remarque que si $x \rightarrow a^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$ et $f(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow a^-$, dans les deux cas la distance entre la courbe de $f(x)$ et la droite $x = a$ devient de plus en plus faible en se rapprochant de $x_0 = a$. On dit que $x = a$ est une *asymptote verticale* de $f(x)$.

De même si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, on dit que $y = b$ est une *asymptote horizontale* de $f(x)$.

Remarque 2.4

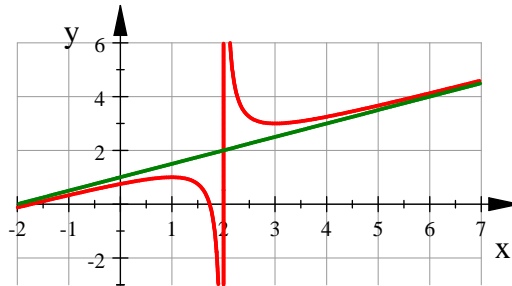
Une fonction peut avoir des asymptotes verticales, et horizontales en même temps.

ä **Exemple 2.21** La fonction $f(x) = \frac{x+3}{x-1} = 1 + \frac{4}{x-1}$ a comme asymptote verticale la droite $x = 1$ et la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale



Plus généralement, les fonctions peuvent avoir des asymptotes obliques ou parfois des courbes comme asymptotes. L'asymptote détermine la direction suivant laquelle la fonction augmente indéfiniment.

ä **Exemple 2.22** La fonction $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$ a deux asymptotes :
 Verticale : $x = 2$ et oblique la droite $y = \frac{x}{2} + 1$



Théorème 2.2 (Propriétés des limites) Soient les deux fonctions d'une même variable x : $f(x)$ et $g(x)$ telles que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

Dans ces conditions on a les propriétés suivantes : (qui se démontrent sans difficultés)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell + m$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell - m$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [a \times f(x)] = a \times \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \times \ell$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \times m$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{\ell}{m} \text{ si } m \neq 0$$

(2.18)

Remarque 2.5

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $g(x)$ est bornée sur un voisinage de x_0 alors on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = 0$$

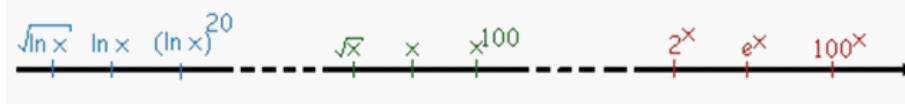
ä **Exemple 2.23** Soit $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ on a } -1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ et il en est de même } \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

b) Echelle de comparaison



– Si $f(x) > g(x)$, c'est-à-dire $f(x)$ est à droite de $g(x)$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{\ln x}} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100}}{100^x} = 0 \quad \dots$$

– Si $f(x) < g(x) < h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$

ä **Exemple 2.24** On désigne par $E(x) = \lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x ,

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

Pour tout réel u on a : $u - 1 < E(u) \leq u$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{b}{x} - 1 < E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{x}$$

et, par suite,

$$\forall x > 0, b - x < xE\left(\frac{b}{x}\right) \leq b \quad \text{et} \quad \forall x < 0, b < xE\left(\frac{b}{x}\right) \leq b - x$$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{b}{x}\right) = b$, puis

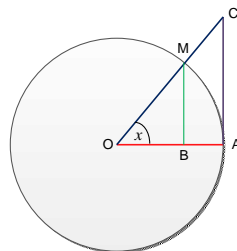
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}$$

ä **Exemple 2.25** Soit à chercher : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ et on a : $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

si $x \rightarrow 0$: $\cos x \rightarrow 1$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, par suite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

En effet :

Considérons le cercle de centre O et de rayon 1, et soit x la mesure du secteur \widehat{AOM} , on a donc $\sin x = \overline{BM}$, $\cos x = \overline{OB}$ et $\tan x = \overline{AC}$



Soit S_1 l'aire du triangle MOA : $S_1 = \frac{1}{2} OA \times MB = \frac{1}{2} \times 1 \times \sin x = \frac{1}{2} \sin x$

Soit S_2 l'aire du secteur MOA : $S_2 = \frac{1}{2} OA \times \widehat{AM} = \frac{1}{2} \times 1 \times x = \frac{1}{2} x$

où $\widehat{AM} = OA \times x = x$

et soit S_3 l'aire du triangle COA : $S_2 = \frac{1}{2}OA \times AC = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan x = \frac{1}{2} \tan x$

Il est clair que $S_1 < S_2 < S_3$, alors $\sin x < x < \tan x$ ou bien :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

2.3.5 Limites de fonctions usuelles

Dans la suite a, n, α, β sont des réels positifs et $a > 1$

1. Puissance de x , pour $n > 0$:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-n} = 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-n} = +\infty$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty$

(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-2n} = +\infty$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-(2n+1)} = -\infty$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+kx)^{1/x} = e^k$

(i) $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{y}\right)^y = e^k$

2. Fonctions exponentielles :

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{\beta x} = \infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^{\beta x} = 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{-\beta x} = 0$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^{-\beta x} = \infty$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{\beta x}}{x^\alpha} = \infty$

(g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^{\beta x}}{x^\alpha} = 0$

(h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n a^{-\beta x} = 0$

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a^{\beta x} = 0$

3. Logarithme :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^n} = 0$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^n (\ln x)^\beta\right) = 0$

4. Fonctions trigonométriques :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$

(g) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

(h) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$

5. Fonctions hyperboliques :

(a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh x = \pm\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cosh x = +\infty$

(c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh x = \pm 1$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x} = 0$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = 1$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

2.3.6 Formes indéterminées

Dans certains cas, les théorèmes précédents, relatifs à la limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou autre ne permettent pas de conclure la valeur de la limite ; l'expression considérée se présente alors sous forme dite " forme indéterminée.

Ces formes sont :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad (-1)^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

On dit qu'on a levé l'indétermination lorsque l'on a trouvé la limite.

Les formes $\frac{0}{\infty} = 0$ et $\frac{\infty}{0} = \infty$ se présentent comme indéterminées puisque $0 \times \infty$ est une forme indéterminée.

Le tableau ci-dessus sera général si on précise les cas particuliers où les limites de $f(x)$ et $g(x)$ sont infinies ou nulles.

Si $f(x) \rightarrow$	et $g(x) \rightarrow$	$f(x) + g(x) \rightarrow$	$f(x) \times g(x) \rightarrow$	$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow$
∞	m	∞	∞	∞
ℓ	∞	∞	∞	0
$+\infty$	$-\infty$	$\infty - \infty : \text{indét.}$	$-\infty$	indét.
0	∞	∞	$0 \times \infty : \text{indét.}$	0
∞	0	∞	$\infty \times 0 : \text{indét.}$	∞
0	0	0	0	indét.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$: \text{indét.}$

Il est impossible à priori de prévoir le comportement du rapport $f(x)/g(x)$ qui est une forme indéterminée .

Dans le cas d'indétermination, une étude directe permet de lever l'indétermination.

a) Quelques techniques de calcul algébrique des limites

- Mise en facteur du terme prépondérant

On classe les termes par ordre décroissant de prépondérance, puis on met le prépondérant en facteur. Puisqu'on a mis le terme prépondérant en facteur, la parenthèse commence par 1 et continue par des termes tendant vers 0. La parenthèse tend donc vers 1 et l'expression vers ∞ .

ä **Exemple 2.26** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - e^x)$

Pour $x \rightarrow +\infty$ on aura une forme indéterminée ($\infty - \infty$)

On classe les termes par ordre décroissant de prépondérance : $-e^x + x - 1$

On met le prépondérant en facteur $e^x (-1 + xe^{-x} - e^{-x})$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 + xe^{-x} - e^{-x}) = -1$

de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Soit finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - e^x) = -\infty$

ä **Exemple 2.27** Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{1+e^x-e^{-x}}$

Pour $x \rightarrow +\infty$ on aura une forme indéterminée $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\frac{x-1}{1+e^x-e^{-x}} = \frac{x-1}{e^x+1-e^{-x}} = \frac{x(1-1/x)}{e^x(1+e^{-x}-e^{-2x})} = xe^{-x} \frac{1-1/x}{1+e^{-x}-e^{-2x}}$$

$$\text{si } x \rightarrow +\infty : \frac{1}{x} \rightarrow 0, e^{-x} \text{ et } e^{-2x} \rightarrow 0 \implies \frac{1-1/x}{1+e^{-x}-e^{-2x}} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{1+e^x-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} \frac{1-1/x}{1+e^{-x}-e^{-2x}} = 0 \times 1 = 0$$

– Factorisation

Dans le cas des fonctions rationnelles dont le numérateur et le dénominateur contenant de termes en $(x-a)$. c'est-à-dire si $f(x)$ est de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec a est une racine de $P(x)$ et $Q(x)$.

Après factorisation on simplifie par $(x-a)^k$

ä **Exemple 2.28** $f(x) = \frac{x^3 - a^3}{x - a}$

pour $x = a$, $f(a)$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$\text{Cependant } x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$\implies f(x) = \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{(x-a)} = x^2 + ax + a^2 \text{ et } f(a) = 3a^2.$$

ä **Exemple 2.29** $\lim_{x \rightarrow +3} \frac{3x^3 - 10x^2 + x + 6}{2x^2 - x - 15} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow +3} (3x^3 - 10x^2 + x + 6) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +3} (2x^2 - x - 15) = 0$$

$$\frac{3x^3 - 10x^2 + x + 6}{2x^2 - x - 15} = \frac{(x-1)(x-3)(3x+2)}{(2x+5)(x-3)} = \frac{3x+2}{2x+5} (x-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +3} \frac{3x^3 - 10x^2 + x + 6}{2x^2 - x - 15} = \lim_{x \rightarrow +3} \frac{(x-1)(3x+2)}{2x+5} = 2$$

– Quantité conjuguée

Dans les cas où on a une forme indéterminée des fonctions contenant des termes : $\sqrt{h(x)} \pm g(x)$ ou $\sqrt{h(x)} \pm \sqrt{g(x)}$ on peut enlever l'indétermination en utilisant la technique de la "quantité conjuguée"

ä **Exemple 2.30** soit à calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + (x+1)^2} - (x+1) \right)$

Si $x \rightarrow +\infty$ on aura une forme indéterminée : $\infty - \infty$.

Pour éliminer l'indétermination, on multiplie et divise par l'expression conjuguée :

$$\sqrt{4 + (x+1)^2} + (x+1)$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{4 + (x+1)^2} - (x+1) \\
 &= \frac{\left(\sqrt{4 + (x+1)^2} - (x+1)\right) \left(\sqrt{4 + (x+1)^2} + (x+1)\right)}{\sqrt{4 + (x+1)^2} + (x+1)} \\
 &= \frac{4 + (x+1)^2 - (x+1)^2}{\sqrt{4 + (x+1)^2} + (x+1)} = \frac{4}{\sqrt{4 + (x+1)^2} + (x+1)} \\
 \text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0
 \end{aligned}$$

ä **Exemple 2.31** $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1 - (x-1))}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 0
 \end{aligned}$$

ä **Exemple 2.32** Soit $f(x) = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$, et on demande de calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} \\
 &= \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} \\
 &= \frac{(1-x - (1+x))}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} = -1
 \end{aligned}$$

2.4 Continuité

Lorsqu' on trace un graphe représentant un phénomène, par exemple la variation de la distance (x) traversée en fonction du temps (t), on fait connecter les points mesurés $Q_i(t_i, x_i)$ par une courbe *ininterrompue* (figure 9) pour déterminer aussi les coordonnées des points non mesurés.

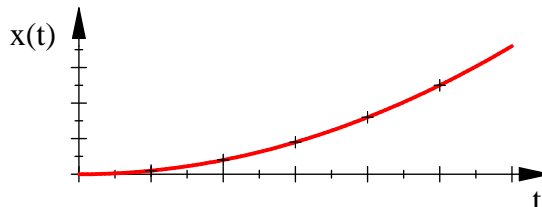


FIG. 2.9 – Courbe continue

Dans ce cas on a assimilé la courbe comme **continue** par suite la fonction est considérée **continue**, c'est-à-dire, la fonction ne passe pas d'une valeur à une autre sans prendre les valeurs intermédiaires.

2.4.1 Continuité en un point

Pour bien comprendre la notion de continuité, on va tout d'abord définir la continuité en un point :

Définition 2.33 On dit que la fonction $f(x)$ est continue pour la valeur x_0 (ou au point x_0) si :

- $f(x)$ est définie pour $x = x_0$ c.à.d $f(x_0)$ existe.
- $f(x) \rightarrow f(x_0)$ lorsque $x \rightarrow x_0$

$$f(x) \text{ est continue au point } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (2.19)$$

Par exemple $f(x) = x^2 + 1$ est continue au point $x_0 = 0$. En effet $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$ et $f(0) = 0^2 + 1 = 1$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Mais on a noté qu'une fonction $f(x)$ admet une limite en un point si les limites de cette fonction à gauche et droite sont égales et puisque la continuité en un point dépend de la valeur de la limite dans ce point donc il faut que la fonction soit continue à gauche et droite de ce point.

- continuité à gauche $\iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$
- continuité à droite $\iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$
- continuité dans le point $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+) = f(x_0)$

2.4.2 Théorèmes de continuité

Théorème 2.3 Les propriétés des limites conduisent aux conclusions suivantes :

- Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions continues au point x_0 , il en est de même de les fonctions : $f(x) + g(x)$; $a \times f(x)$; $f(x) \times g(x)$; et de $\frac{f(x)}{g(x)}$ si $g(x_0) \neq 0$.
- Si une fonction $f(x)$, définie ou non en x_0 , admet deux limites finies et distinctes suivant que x tend vers x_0 par valeurs positives ou négatives, on dit que f présente en x_0 une discontinuité de première espèce et $f(x)$ présente un saut d'amplitude

$$\Delta f = f(x_0^+) - f(x_0^-)$$

(figure 10).

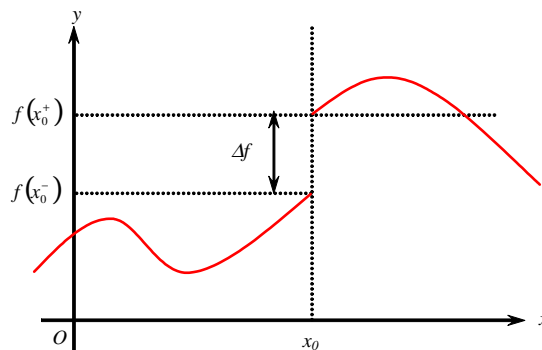
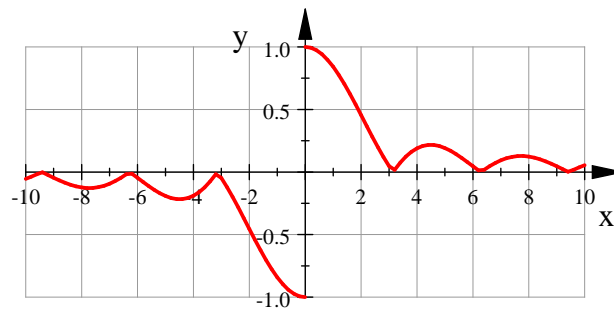


FIG. 2.10 – Saut d'amplitude

ä **Exemple 2.33** La fonction $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ a une discontinuité de première espèce au point $x = 0$, où la limite à droite est $+1$ et à gauche -1 : elle présente un saut de $\Delta f(0) = 2$



Graphes de $\frac{|\sin x|}{x}$

2.4.3 Prolongement par continuité

Soit $f(x)$ une fonction qui est définie sur $]a, b[$ sauf en $x_0 \in]a, b[$. Si $f(x)$ admet une limite L quand x tend vers x_0 à gauche et à droite mais $L \neq f(x_0)$, alors, $f(x)$ n'est pas continue au point x_0 . On peut conventionnellement importer une fonction $g(x)$, telle que $g(x) \equiv f(x)$ en tout point de $]a, b[$ sauf au point x_0 et on donne à $g(x)$ la valeur L au point x_0 , $f(x)$ se trouve ainsi prolongée par continuité en x_0 .

Définition 2.34 On dit que la fonction $g(x)$ est le prolongement par continuité de $f(x)$ et $g(x)$ est définie de la manière suivante :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ L & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

ä **Exemple 2.34** Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ mais $f(0)$ est de la forme $\frac{0}{0}$ indéterminer, par suite $f(x)$ a une limite au point $x = 0$ cette limite est $L = 1$ mais $f(0)$ n'existe pas. On peut poser :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

une fonction continue au point $x = 0$ et elle est le prolongement par continuité de $f(x)$.

2.4.4 Continuité sur un segment

Définition 2.35 Soit $[a, b]$ un segment sur lequel la fonction $f(x)$ est définie. Elle sera continue sur $[a, b]$ si :

- Elle est continue en tout point x de l'intervalle ouvert $]a, b[$.
- Elle est continue à gauche de a et à droite de b .

a) Propriétés

Théorème 2.4 Toute fonction $f(x)$ continue sur $[a, b]$, est bornée c'est-à-dire : $\forall x \in [a, b]$ il existe m et M telles que $m \leq f(x) \leq M$.

Théorème 2.5 Si $f(x)$ est bornée pour $x \in [a, b]$ et de plus continue sur $[a, b]$, elle atteint sa borne supérieure.

Théorème 2.6 Toute fonction $f(x)$ continue sur $[a, b]$ prend au moins une fois toute valeur λ compris entre m et M .

Théorème 2.7 Une fonction ne peut changer de signe qu'en s'annulant ou en cessant d'être continue, et si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine comprise entre a et b , (figure 11).

Théorème 2.8 Une fonction $f(x)$ est continue par morceaux sur un intervalle I si elle admet en chaque point de I une limite à droite et une limite à gauche.

Théorème 2.9 Si la fonction $g(x)$ est continue pour $x = x_0$ et si la fonction $f(g)$ est continue pour $g = g_0 = g(x_0)$ alors la fonction composée $(f \circ g)(x)$ est continue pour $x = x_0$.

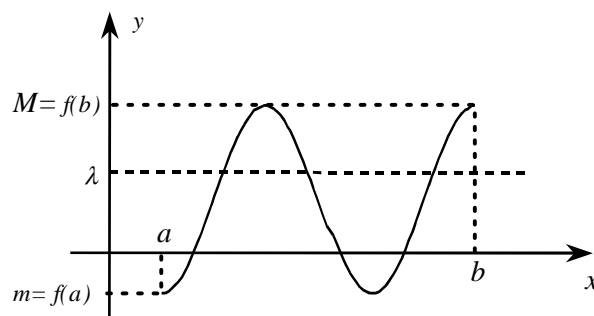


FIG. 2.11 – Continuité sur un segment

2.5 Fonction inverse ou réciproque

Supposons que $f(x)$ est une fonction continue et monotone croissante sur $[a, b]$. Dans ces conditions $f(a)$ est le minimum et $f(b)$ le maximum de $f(x)$ sur $[a, b]$. Il est évident qu'à tout y_0 vérifiant $f(a) < y_0 < f(b)$ correspond une seule valeur x_0 comprise entre a et

b et telle que $y_0 = f(x_0)$. Cette correspondance $y_0 \rightarrow x_0$ réalise une application du segment $[f(a), f(b)]$ sur le segment $[a, b]$ nous l'appellerons fonction réciproque ou inverse de f et nous noterons : $x = f^{-1}(y)$

Ainsi :

$$y = f(x) \text{ et } a \leq x \leq b \iff x = f^{-1}(y) \text{ et } f(a) \leq y \leq f(b) \quad (2.20)$$

On démontre sans difficultés que la fonction $f^{-1}(y)$ est également continue et monotone croissante sur $[f(a), f(b)]$.

Les fonctions f et f^{-1} sont inverses l'une de l'autre et la fonction composée $f \circ f^{-1}$ est l'identité :

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad (2.21)$$

Soit $M(x, y)$ un point du graphe de la fonction $y = f(x)$ rapporté à un système d'axes rectangulaires sur lesquels on a choisi une même unité de longueur (figure 12).

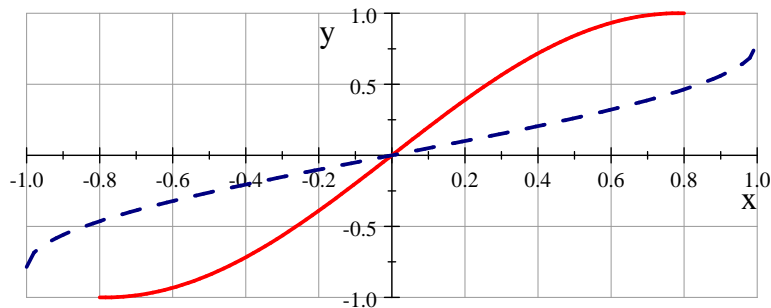


FIG. 2.12 – Courbes de $f(x)$ et $f^{-1}(x)$

Le point M' d'abscisse y et d'ordonnée x appartient sur le graphe de la fonction inverse $f^{-1}(x)$: les graphes de deux fonctions inverses sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

2.5.1 Fonctions trigonométriques inverses

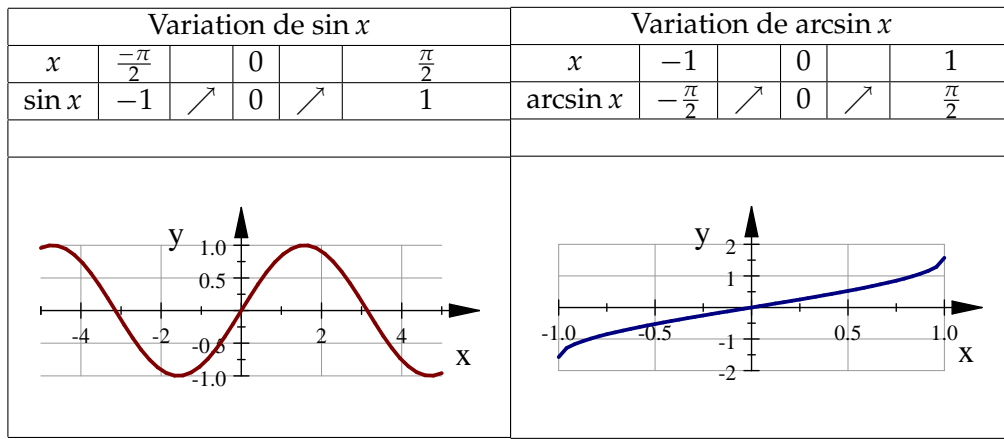
a) Fonction Arcsinus

La fonction $\sin x$ est définie, continue et strictement croissante de -1 à $+1$ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sa fonction inverse : arc dont le sinus est x sera définie sur le segment $[-1, +1]$ et prendra ses valeurs sur le segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On la désigne par la notation : $\arcsin x$

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y; \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.22)$$

On désigne parfois par $\arcsin x$ l'un quelconque des nombres dont le sinus est x ainsi $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ alors que $\arcsin(1/2) = \pi/6 + 2k\pi$.

Des variations de la fonction $\sin x$ on déduit celles de $\arcsin x$.

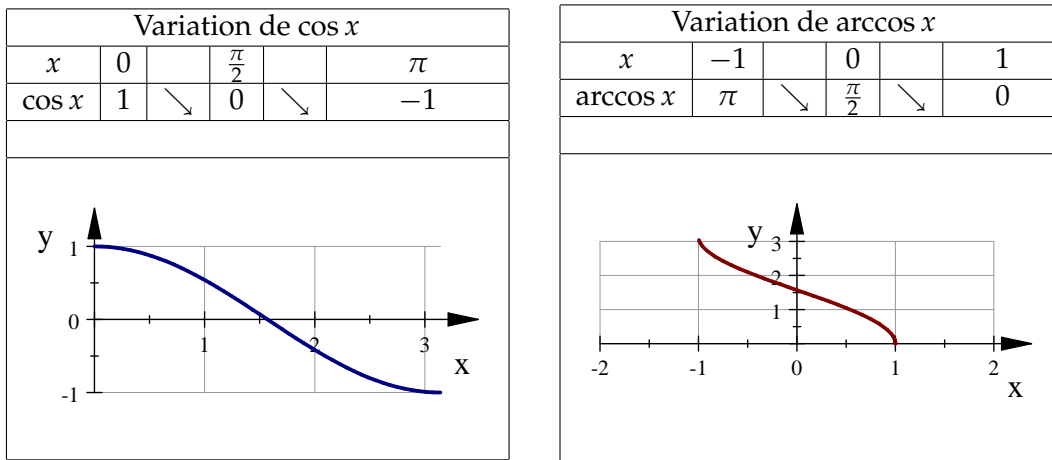


b) Fonction Arccosinus

La fonction $\cos x$ est définie continue et strictement décroissante sur le segment $[0, \pi]$ où elle décroît de $+1$ à -1 sa fonction inverse : **arc** dont le cosinus est x est une fonction continue et décroissante sur le segment $[-1, +1]$ et prend ses valeurs sur le segment $[0, \pi]$; on désigne par la notation $\arccos x$:

$$y = \arccos x \iff x = \cos y ; 0 \leq y \leq \pi \tag{2.23}$$

Des variations de $\cos x$ on déduit les variations de $\arccos x$



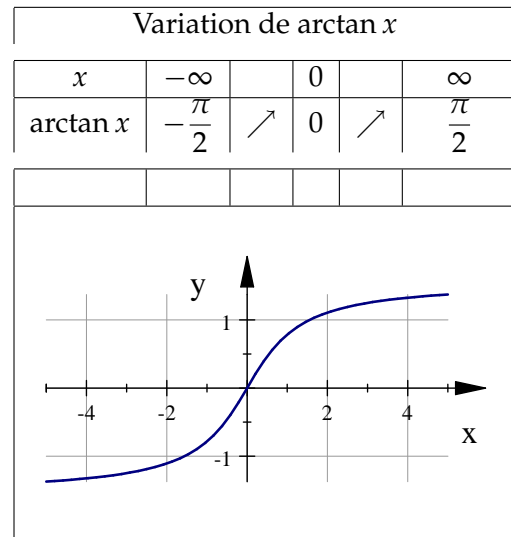
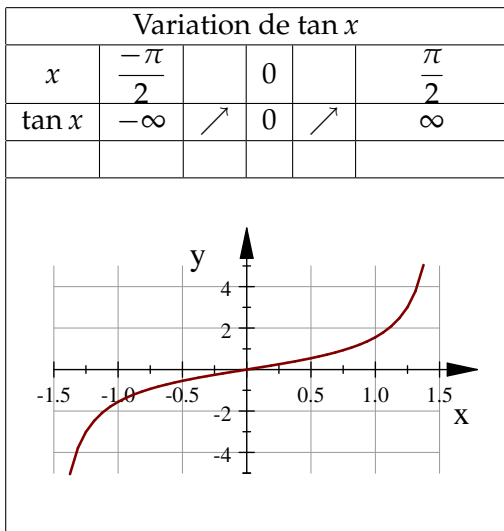
c) Fonction Arctangente

La fonction $\tan x$ est définie, continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et prenant des valeurs dans l'intervalle $]-\infty, +\infty [$. Sa fonction inverse : **arc** dont la tangente est x , est définie continue et strictement croissante dans l'intervalle $]-\infty, +\infty [$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

On désigne par la notation $\arctan x$:

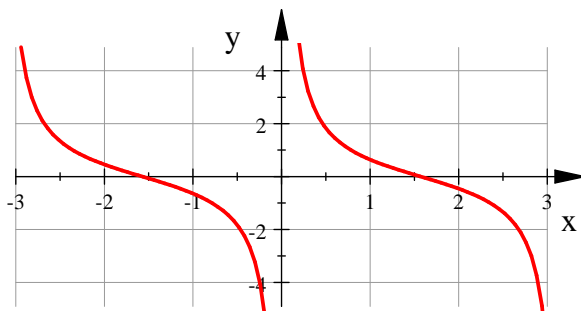
$$y = \arctan x \iff x = \tan y \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \tag{2.24}$$

Des variations de $\tan x$ on déduit les variations de $\arctan x$.

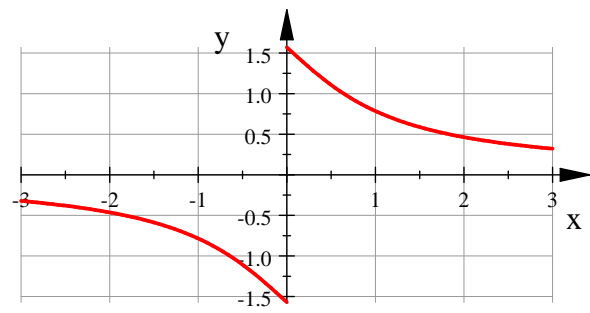


La fonction $\operatorname{arccot} x$, peu utilisée, se définit aisément du seul fait que :

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \tag{2.25}$$



$\cot x$



$\operatorname{arccot} x$

2.5.2 Fonctions hyperboliques inverses

Comme les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques ont leurs réciproques, qui servent elles aussi aux calculs de primitives

a) Fonction $\operatorname{arg} \cosh$

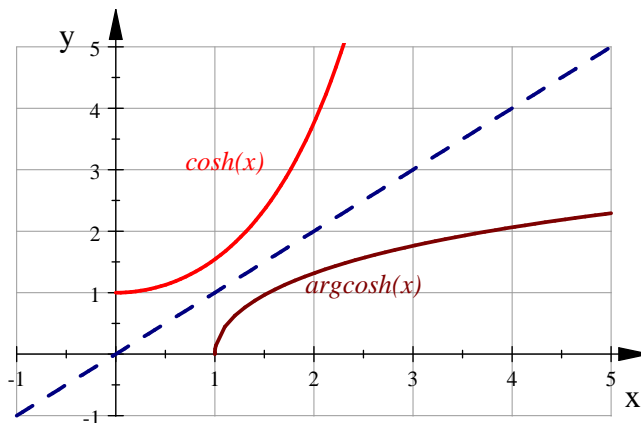
La fonction $\cosh x$ définie sur $[0, +\infty[$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ ; sa limite en $+\infty$ est $+\infty$; C'est donc une bijection de \mathbb{R}_+ dans $[1, +\infty[$ elle admet donc une fonction réciproque, appelée *Argument cosinus hyperbolique* et notée $\cosh^{-1} x$ ou $\operatorname{arg} \cosh x$ ou $\operatorname{Arg} \cosh x$

Par définition

Définition 2.36 Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\cosh^{-1} x$ est l'unique élément de \mathbb{R}_+ qui a pour cosinus hyperbolique x

$$\begin{cases} y = \operatorname{arg} \cosh x = \cosh^{-1} x \\ x \in [1, +\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} x = \cosh y \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

la fonction $\arg \cosh x$ est également continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$



$$\forall x \in [1, +\infty[: \arg \cosh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (2.26)$$

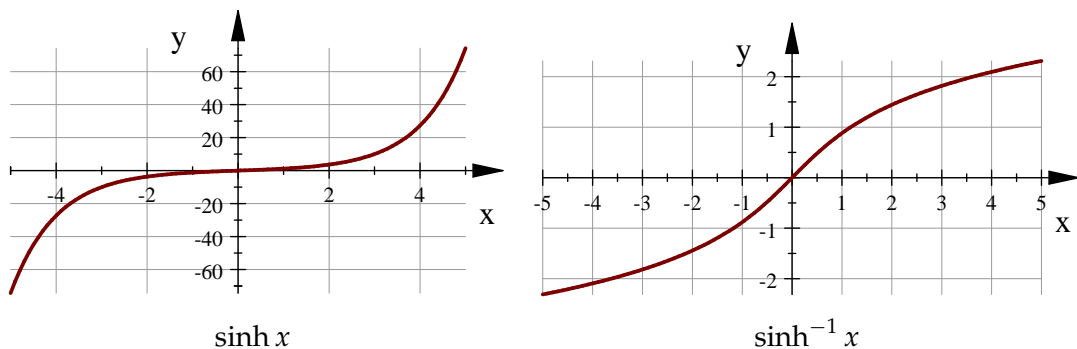
b) Fonction $\arg \sinh$

La fonction sinus hyperbolique ($\sinh x$) est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh x = \pm\infty$, elle réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et admet ainsi une bijection réciproque appelée *Argument sinus hyperbolique* et notée \sinh^{-1} ou $\arg \sinh$ définie sur \mathbb{R} :

Définition 2.37 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sinh^{-1} x$ est l'unique élément de \mathbb{R} qui a pour sinus hyperbolique x

$$\begin{cases} y = \sinh^{-1} x = \arg \sinh x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sinh y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

la fonction $\sinh^{-1} x$ est également continue et strictement croissante sur \mathbb{R}



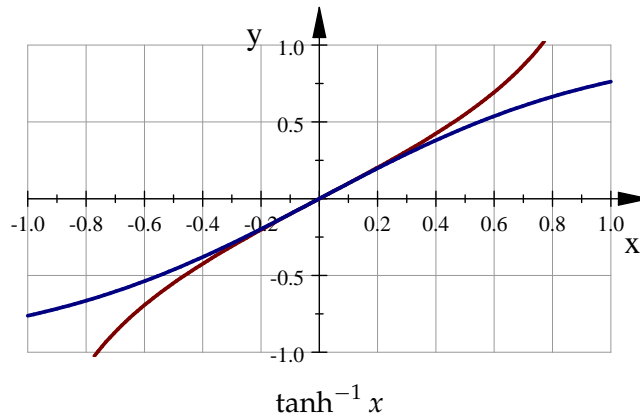
$$\forall x \in \mathbb{R} : \arg \sinh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad (2.27)$$

c) Fonction arg tanh

La fonction \tanh définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $] -1, 1[$ est continue et strictement croissante ; elle admet donc une fonction réciproque, appelée *Argument tangente hyperbolique* et notée \tanh^{-1} ou $\arg \tan$

On a donc

$$\begin{cases} y = \tanh x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tanh^{-1} y = \arg \tanh y \\ y \in] -1, 1[\end{cases}$$



$$\forall x \in] -1, 1[: \arg \tan x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (2.28)$$

2.6 Exercices

Exercice 2.1 Déterminer les intervalles de \mathbb{R} définis par les conditions suivantes sur x :

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| 1. $5x + 2 \geq -3$ | 4. $2\sqrt{2x - x^2} < 1$ |
| 2. $x^2 + 1 \leq 1$ | 5. $ x + x \geq 2$ |
| 3. $ x - 1 \leq 4$ | |

Exercice 2.2 : Quelques inégalités classiques

1. Montrer que pour tous réels x, y on a : $(x + y)^2 \geq 4xy$
2. Montrer que pour tous réels x, y ; on a :

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

3. Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b, c on a :

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

4. En déduire que $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$

5. Montrer que pour tous réels strictement positifs $a; b; c$ on a

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \leq \frac{a+b+c}{2}$$

Exercice 2.3 Déterminer le domaine de définition D de chacune des fonctions suivantes et examiner si elles sont paires ou impaires :

1. $f_1(x) = \sqrt{|x|}$

2. $f_2(x) = \frac{1-x^2}{1+x}$

3. $f_3(x) = \frac{1+x^3}{1-x}$

4. $f_4(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

5. $f_5(x) = \frac{x}{|x|}$

6. $f_6(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

7. $f_7(x) = x \tan x$

8. $f_8(x) = \frac{\sin x}{x}$

9. $f_9(x) = \sqrt{1-|x|}$

10. $f_{10}(x) = |x^2 - x|$

11. $f_{11}(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

12. $f_{12}(x) = |x+1| - |x-1|$

13. $f_{13}(x) = \frac{x-1/x}{x+1/x}$

14. $f_{14}(x) = \frac{(1+x)^{x-1}}{(1-x)^{1+x}}$

15. $f_{15}(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

Exercice 2.4 En désignant par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière inférieure du nombre réel positif x par exemple : $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$ et par $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure du nombre réel positif x , par exemple $\lceil 2.3 \rceil = 3$.

1. Construire les graphes des fonctions suivantes : ($x > 0$)

(a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(b) $g(x) = \lceil x \rceil$

(c) $h(x) = x - \lfloor x \rfloor$

(d) $k(x) = x + \lceil x \rceil$

2. Montrer que la fonction $h(x) = x - \lfloor x \rfloor$; $x > 0$ est périodique.

Exercice 2.5 On considère la fonction $h(x) = |x - \lfloor x \rfloor - 1|$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière inférieure d'un nombre réel x .

- Donner, pour chacun des intervalles ouverts $[-2, -1[$, $[-1, 0[$, $[0, 1[$ et $[1, 2[$ une expression de $h(x)$ sans valeur absolue et partie entière.
- Etudier la continuité de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.
- Tracer le graphe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.
- Déduire que h est périodique de période T à préciser.
- La fonction $h(x)$ est-elle paire ?, impaire ?

Exercice 2.6 Calculer les limites des fonctions suivantes quand $x \rightarrow +\infty$

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \sqrt[3]{1 + 1/x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}} = 1$$

1. $\frac{(x+1)^4}{x^2+1}$

3. $\frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$

5. $\frac{2x+3}{x + \sqrt[3]{x}}$

2. $\frac{1000x}{x^2 - 1}$

4. $\frac{(2x+3)^3(2x-3)^2}{x^5+5}$

6. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

Exercice 2.7 En faisant un changement de variable, calculer les limites des fonctions suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

Exercice 2.8 Utiliser la formule : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan \pi x}{x+2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$

5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

Exercice 2.9 Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$, et calculer :

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{2+x}\right)^x$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}$

Exercice 2.10 Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln(1+x) - \ln x)$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0)$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{a} - 1) \quad (a > 0)$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$

Exercice 2.11 Calculer :

$$\begin{array}{l|l|l} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} & 5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x} - 2}{|x+1|} \\ 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x+1} & 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} & \end{array}$$

Exercice 2.12 Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1} & 6. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x \\ 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x) - e^x}{1 - e^{1/x}} & 7. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) \\ 3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{7} + \sqrt{x} - 3} & 8. \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x}{x-4} - \frac{32}{x^2 - 16} \right) \\ 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 7} - x & 9. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - x}{x - 1} \\ 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 7} - x & \end{array}$$

Exercice 2.13 Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{l|l|l} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x^2} & 5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x \tan \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2 \cos x} \\ 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} & 4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x - \cos x} & \end{array}$$

Exercice 2.14 Soient m et n des entiers positifs. On considère la fonction :

$$f_{m,n}(x) = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$$

1. Etudier $\lim_{x \rightarrow 0} f_{m,n}(x)$ en distinguant les cas :

a) $m = n$ b) $m > n$ c) $m < n$

2. Dédurre :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f_{1,1}(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} f_{2,1}(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f_{1,2}(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} f_{1,3}(x)$

Exercice 2.15 Soit $y(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

1. Calculer :

(a) $A = \lim_{x \rightarrow 0} xy$ | (b) $B = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)y$ | (c) $C = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)y$

2. Vérifier l'égalité : $y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$

Exercice 2.16 Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m , l'évolution de sa température est donnée par

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m) e^{-kt}$$

où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 2.17 En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de $g \text{ m s}^{-2}$. Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$.

En présence d'un frottement, la masse subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle d'un fluide très visqueux (par exemple le miel), la force de frottement est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{m}t})$$

Quelle est la limite de cette fonction pour $t \rightarrow +\infty$

Exercice 2.18 Quelles sont les points de discontinuité de la fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Exercice 2.19 Démontrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une racine réelle sur l'intervalle $[1, 2]$.

Exercice 2.20 Les expressions ci-après définissent une fonction $f(x)$ dont on demande de déterminer l'ensemble de continuité et la nature des points de discontinuité éventuels.

$$1. f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x+1}}$$

$$2. f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - x - 1}{|x+1|}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + x} - \sqrt{\frac{1}{x} - x}}{x + |x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{x + a^2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 2.21 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1} + \ln \sqrt{x^2 + 1}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x = 0$

Exercice 2.22 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{3-x}{x^2-2x-3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur l'ensemble des réels.

Exercice 2.23 La fonction f est définie à partir de

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ a - \frac{b}{x} & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Déterminer les paramètres réels a et b pour que f soit continue partout. Tracer dans ce cas le graphe de f .

Exercice 2.24 On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{a+3}}{x-a}$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = a$, et déterminer ce prolongement.

Exercice 2.25 Soit f une application de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans \mathbb{R} satisfaisant $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 2.26 Soit f une application de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans \mathbb{R} satisfaisant $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0

Exercice 2.27 Soit f la fonction de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 2.28 On considère les applications $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2$. Déterminer les applications composées $f \circ g$ et $g \circ f$. Les applications f et g sont-elles réciproques l'une de l'autre ?

Exercice 2.29 Démontrer les formules suivantes :

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2. Formules d'additions :

(a) $\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b$

(b) $\sinh(a \pm b) = \sinh a \cosh b \pm \cosh a \sinh b$

(c) $\tanh(a \pm b) = \frac{\tanh a \pm \tanh b}{1 \pm \tanh a \tanh b}$

3. Fonctions inverses

(a) $\arg \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(b) $\arg \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(c) $\arg \tanh x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

Exercice 2.30 Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 4$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} ,
2. Tracer la courbe (C) et en déduire le tracé de la courbe (C') représentative de f^{-1} .
3. (C) et (C') se coupent en un point A , calculer les coordonnées de A ,
4. Soit g la fonction définie sur $[-5; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \sqrt{x+5}$ Calculer $(g \circ f)(x)$ et en déduire l'expression de f^{-1} .

Exercice 2.31 On considère les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies par :

$$f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$$

$$g(x) = \sqrt{|1+x|} - \sqrt{|1-x|}$$

1. Donner pour chacun des intervalles : $]-\infty, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, +\infty[$ une expression de $f(x)$ sans valeurs absolues.
2. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} .
3. Tracer la courbe de $f(x)$.
4. Quel est le domaine de définition de $g(x)$? Est-elle paire ? impaire ? Expliquer pourquoi elle est continue sur \mathbb{R} .

5. Donner, pour chacun des intervalles ouverts $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$ une expression de $g(x)$ sans valeur absolue.
6. On donne, pour $a > 0$ et $b > 0$: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

Chapitre 3

Dérivée et différentielle

LE calcul différentiel (calcul infinitésimal) est un outil qui permet d'étudier les mouvements. Lorsqu'un mouvement obéit à certaines règles et qu'il peut être mis sous forme d'équation, le calcul différentiel permet de déterminer les lois auxquelles ses variations obéissent.

Entre 1665 et 1666, *Newton* conçoit le calcul infinitésimal permettant du même coup d'étudier le mouvement de toutes choses. Le procédé de *Newton* consistait à combiner les possibilités du découpage en tranches infinitésimales développé par les *Grecs* et celle de la représentation graphique de *Descartes* pour forger un outil puissant et très simple. Ce procédé s'avéra d'une telle efficacité qu'en quelques années *Newton* fut en mesure d'énoncer les lois du mouvement et celles de la gravitation. Ces lois fondamentales de la physique expliquent le fonctionnement du système solaire et l'action sur un corps en mouvement de forces extérieures comme la gravitation ou la traction d'un ressort. Les avions, les télévisions, les bombes, les ponts, les vaisseaux spatiaux, etc., sont en quelque sorte les conséquences de la découverte de *Newton* et lui doivent d'exister.

Aujourd'hui la portée du calcul différentiel dépasse largement sa vocation première soit la compréhension des phénomènes physiques. Cet outil très polyvalent se retrouve partout.

- En économie, on l'utilise pour prévoir les tendances des marchés.
- Les biologistes étudient la croissance des populations à l'aide du calcul différentiel.
- En recherche médicale, on l'utilise pour créer des équipements à rayons X ou à ultrasons.
- L'exploration spatiale serait impossible sans le calcul différentiel.
- Les ingénieurs l'utilisent dans la conception des ponts.
- Les manufacturiers d'équipements sportifs l'utilisent dans la conception de leurs raquettes de tennis ou leurs bâtons de baseball.

La liste est pratiquement interminable. Tous les domaines scientifiques utilisent d'une façon ou d'une autre cet outil merveilleux qu'est le calcul différentiel.

3.1 Le taux de variation

Lorsqu'on étudie la croissance d'une grandeur, fonction, on s'intéresse souvent à la vitesse à laquelle s'effectue cette croissance sur des intervalles donnés. On s'intéresse en fait à ce qu'on appelle *le taux de variation moyen* de la fonction.

Définition 3.1 *Le taux de variation (ou de croissance) exprime la variation d'une grandeur relativement à la variation d'une autre.*

3.1.1 Croissance de bactérie

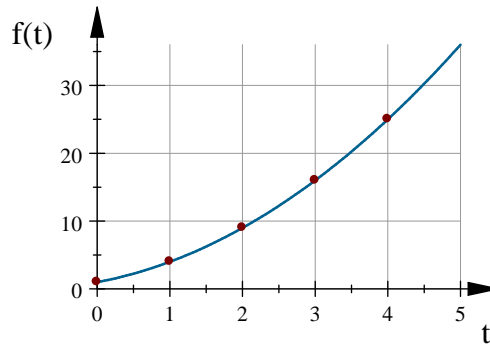
Considérons une bactérie dont la croissance est définie par la fonction $P(t) = (1+t)^2$ où t représente un temps en minutes, et $P(t)$ représente le nombre de bactéries au temps t .

Initialement ($t = 0$), le nombre de bactéries est $P(0) = (1+0)^2 = 1$

Après une minute ($t = 1$), le nombre de bactéries devient $P(1) = (1+1)^2 = 4$

Pour les quatre premières minutes, on obtient

t_{\min}	0	1	2	3	4
$P(t)$	1	4	9	16	25



On remarque que la croissance des bactéries est de plus en plus rapide.

La population double, triple ou quadruple très rapidement. Ainsi,

de $t = 0$ à $t = 1$, l'accroissement des bactéries est de $4 - 1 = 3$, Le taux de variation moyen des bactéries de $t = 0$ à $t = 1$ est de $\frac{4-1}{1-0} = 3$ bactéries/min

de $t = 1$ à $t = 3$, l'accroissement est de $16 - 4 = 12$, Le taux de variation moyen est de $\frac{16-4}{3-1} = 6$ bactéries/min

de $t = a$ à $t = b$, l'accroissement sera de $P(b) - P(a)$. Le taux moyen de croissance de bactéries est donc $\frac{P(b)-P(a)}{b-a}$

Si on note ΔP pour la variation de P et Δt pour la variation de t , on aura,

$$\text{Le taux de variation moyen } T = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Serait-il possible d'obtenir le taux de croissance des bactéries à un moment précis ; disons à la 4^e minute, sans avoir à utiliser la calculatrice ?

La réponse est oui. On aurait pu éviter des longs calculs et résoudre le problème autrement en utilisant la notion de **limite**.

On considère l'intervalle de temps $[4, t]$, le taux de variation moyen de bactéries sur cet intervalle est

$$T = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t) - P(4)}{t - 4}$$

Pour déterminer le taux de variation à l'instant $t = 4$, On calcule la limite lorsque t s'approche de 4 : ($t \rightarrow 4, \iff \Delta t \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} T(4) &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{P(t) - P(4)}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t+1)^2 - 25}{t - 4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 + 2t + 1 - 25}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t+6)(t-4)}{t - 4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} (t+6) = 10 \end{aligned}$$

La valeur obtenue s'appelle le *taux de variation instantané* de la population des bactéries à la 4^e minute.

à **Exemple 3.1** On lance un caillou dans un lac. Le caillou produit des ondes circulaires centrés au point de chute et des rayons croissants.

1. Calculer le taux de variation moyen de l'aire du cercle ainsi formé lorsque le rayon passe de 1 m à 4 m
2. Trouver l'expression générale représentant le taux de variation de l'aire du cercle par rapport au rayon.
3. Quel est le taux de variation de l'aire du cercle lorsque le rayon est de 1 m, de 4 m

Solution L'aire du cercle, de rayon r , est $S(r) = \pi r^2$

1. Le taux de variation moyen de l'aire si $r : 1 \rightarrow 4$ est

$$T_{1 \rightarrow 4} = \frac{S(4) - S(1)}{4 - 1} = \frac{16\pi - \pi}{3} = 5\pi \text{ m}^2 / \text{m de rayon}$$

2. L'expression générale représentant le taux de variation de l'aire du cercle est

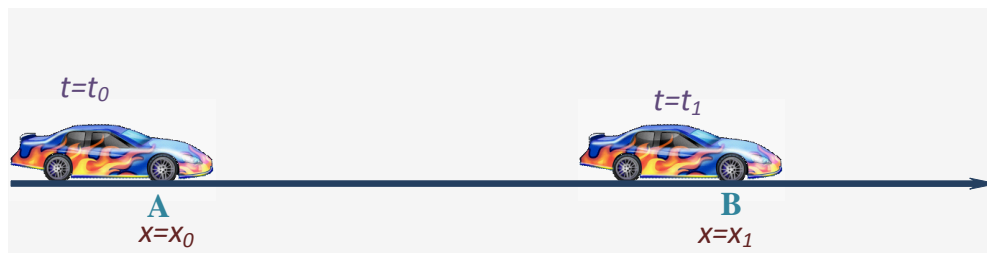
$$\begin{aligned} T &= \lim_{r \rightarrow a} \frac{S(r) - S(a)}{r - a} = \lim_{r \rightarrow a} \frac{\pi r^2 - \pi a^2}{r - a} \\ &= \lim_{r \rightarrow a} \frac{\pi (r + a)(r - a)}{r - a} = \pi \lim_{r \rightarrow a} (r + a) = 2\pi a \end{aligned}$$

3. Pour $a = 1$: $T = 2\pi \text{ m}^2 / \text{m de rayon}$ Pour $a = 4$: $T = 8\pi \text{ m}^2 / \text{m de rayon}$.

3.1.2 Vitesse instantanée

Considérons le mouvement d'une voiture suivant un trajet rectiligne suivant la direction de l'axe Ox .

Supposons que la voiture départ à l'instant $t = t_0$ d'un point A d'abscisse $x = x_0$ vers un point B d'abscisse $x = x_1$, où elle arrive à l'instant $t = t_1$. La distance x parcourue par la voiture calculée à partir de la position initiale A est une fonction du temps t .



La vitesse moyenne du mouvement est le rapport de la distance parcourue : $\Delta x = x_1 - x_0$ à la durée totale du mouvement $\Delta t = t_1 - t_0$. Soit

$$V = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du mouvement}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La vitesse moyenne n'est pas toujours en mesure de caractériser exactement la vitesse du mouvement d'un objet à l'instant t . Si, par exemple, le mouvement est tel que la vitesse du mobile, très grande tout d'abord, et elle devient très petite ensuite, il est évident que la vitesse moyenne ne peut exprimer de telles particularités du mouvement et nous donner une idée juste de la vitesse exacte du mouvement à l'instant t .

Pour préciser la vitesse exacte il est nécessaire de préciser la vitesse à chaque instant, dans ce cas on utilise la notion de la vitesse moyenne mais pour des intervalles du temps suffisamment petits ($\Delta t \rightarrow 0$)

La limite vers laquelle tend la vitesse moyenne, quand $\Delta t \rightarrow 0$, caractérise au mieux la vitesse du mouvement du mobile à l'instant t : $v(t)$. Cette limite est appelée *la vitesse instantanée du mouvement*.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Cette formule donne la vitesse d'un mouvement non uniforme.

La distance x est une fonction du temps $x = x(t)$, à un instant quelconque t on a $x_0 = x(t)$ et à l'instant $t + \Delta t$ on a $x_1 = x(t + \Delta t)$ alors la distance traversée Δx s'exprime : $\Delta x = x_1 - x_0 = x(t + \Delta t) - x(t)$, par suite la vitesse instantanée s'écrit :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (3.1)$$

à **Exemple 3.2** Trouver la vitesse d'un mouvement uniformément accéléré à un instant quelconque t et à l'instant $t = 2$ s, si la loi du mouvement est : $x(t) = 5t^2$

$$x(t + \Delta t) = 5(t + \Delta t)^2 = 5(t^2 + (\Delta t)^2 + 2t\Delta t)$$

$$x(t + \Delta t) - x(t) = 5(t^2 + (\Delta t)^2 + 2t\Delta t) - 5t^2 = 5((\Delta t)^2 + 2t\Delta t)$$

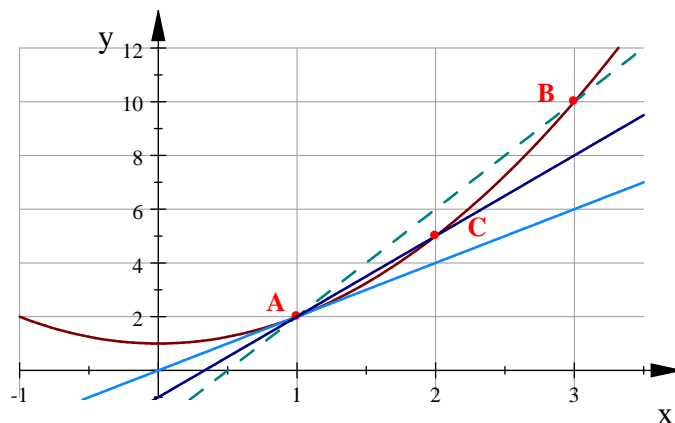
$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5((\Delta t)^2 + 2t\Delta t)}{\Delta t} = 5 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t + 2t) = 10t$$

$$\text{à l'instant } t = 2 \text{ s : } v(2) = 20 \text{ m/s}$$

La vitesse peut être considéré comme un taux de variation : le taux de variation de la position par rapport au temps.

3.1.3 Tangente en un point

Considérons la parabole $y = x^2 + 1$, cherchons l'équation de la tangente au point $A(1, 2)$: c'est la droite qui touche la courbe au point de tangence.



Considérons tout d'abord une droite ($D = (AB)$) qui coupe la parabole aux points A et $B(3,10)$.

La pente de cette droite est $m_1 = \frac{10-2}{3-1} = 4$, son équation se détermine par : $\frac{y-2}{x-1} = 4$ soit $y = 4(x-1) + 2$, cette droite n'est pas tangente à la parabole.

Considérons un autre point plus proche de A . Soit $C(2,5)$, la pente de la droite (AC) est $m_2 = \frac{5-2}{2-1} = 3$ et l'équation de la droite est $y = 3(x-1) + 2$, cette droite est proche de la tangente, mais aussi n'est pas tangente.

Considérons un troisième point $(1.05, 2.1025)$, la pente est $m_3 = \frac{2.1025-2}{1.05-1} = 2.05$ et l'équation de la droite est $y = 2.05(x-1) + 2$

Si on continue à choisir des points M plus proches de A , les droites (AM) sont plus proches de la tangente.

Soit $M(x_M, y_M)$ avec $x_M = 1+h$, et $y_M = f(1+h) = (1+h)^2 + 1$ où h est très proche de 0.

La pente est dans ce cas est

$$m_M = \frac{\left((1+h)^2 + 1\right) - 2}{(1+h) - 1} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$$

Si $h \rightarrow 0$ on trouve $m = 2$ et l'équation de la tangente est $y = 2(x-1) + 2 = 2x$

En générale : Soit (C) la courbe représentative de la fonction $f(x)$, supposée continue, A et B deux points d'abscisses x_0 et $x_0 + \Delta x$ sur (C) (Figure 1)

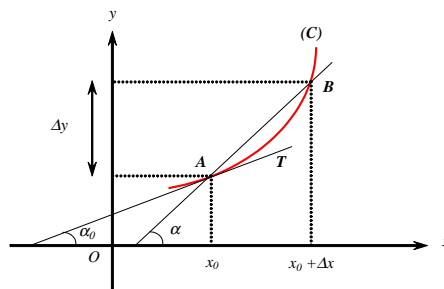


FIG. 3.1 – Tangente à une courbe

La sécante AB a pour pente m le rapport de la différence des ordonnées de B et A à la différence de leurs abscisses ; si α est l'angle que fait la sécante AB avec l'axe Ox on aura :

$$m_1 = \tan \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Faisons tendre Δx vers zéro, le point B se rapprochera du point A en décrivant (C) . A la limite, si elle existe, au point x_0 la droite (AB) pivotera autour de A et tendra vers une position limite (AT) qui est par définition la tangente en A à (C) . Cette tangente a donc pour pente

$$m = \tan \alpha_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

3.2 Dérivée

Dans les problèmes précédents on a utilisé le même type de limites pour calculer le taux instantané de variation.

Par un procédé identique à celui qui est utilisé pour obtenir la valeur d'une vitesse instantanée, nous allons déterminer le taux de variation instantanée d'une fonction en point.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x , définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$. Au point $x \in [a, b]$ la valeur de la fonction est $f(x)$, si on donne à x un accroissement Δx , $f(x)$ subira un accroissement $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ (Figure 2).

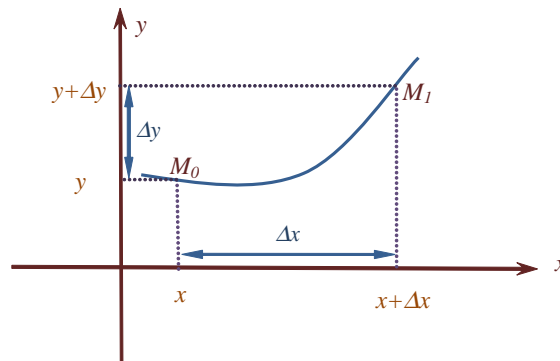


FIG. 3.2 – Accroissement d'une fonction

La quantité $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ représente le taux moyenne de variation de la fonction $f(x)$ par rapport à la variation de la variable x . Si la variation de x est infinitésimale, la variation de f l'est aussi, et dans ce cas on peut parler de la variation infinitésimale de f , c'est-à-dire le taux instantanée de variation de f par rapport à x et elle est donné par

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

lorsque cette limite existe dans \mathbb{R} .

Nous constatons que le résultat obtenu est également une fonction de la variable x . Cette nouvelle fonction s'appelle fonction dérivée de f

Définition 3.2 On appelle dérivée de la fonction $f(x)$, notée $f'(x)$, la limite, si elle existe du rapport : $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ quand Δx tend vers zéro

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.2)$$

ou bien

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (3.3)$$

Il est équivalent d'écrire qu'en un point x_0 , la dérivée est :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.4)$$

et en particulier pour une fonction passant par l'origine des coordonnées $f(0) = 0$, la dérivée à l'origine est :

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \quad (3.5)$$

Les notations suivantes sont également utilisées pour désigner la fonction dérivée d'une fonction $f(x)$:

$$f'(x); \frac{df}{dx}; D_x(f)$$

ä **Exemple 3.3** Cherchons la dérivée de la fonction $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

la dérivée de la fonction $f(x) = x^3$ au point $x_0 = 1$ est :

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \end{aligned}$$

ä **Exemple 3.4** Calculons la dérivée de $\sin x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(\cos \Delta x - 1) \sin x}{\Delta x} + \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cos x \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\Delta x} \times \left(-2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2} \right) + \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cos x \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-2 \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} \times \sin(\Delta x/2) \times \sin x \right] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cos x \right) \\ &= [-1 \times 0 \times \sin x] + 1 \times \cos x = \cos x \end{aligned}$$

la dérivée de $\sin x$ au point $x_0 = 0$ est :

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

3.2.1 Fonction dérivable

Définition 3.3 Une fonction $f(x)$ est dite dérivable au point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, c'est-à-dire elle est finie et bien déterminée.

Définition 3.4 Une fonction dérivable en tout point de l'intervalle I est dite dérivable sur I .

Définition 3.5 Si une fonction est dérivable pour toutes les valeurs de son domaine, on dit simplement qu'elle est dérivable.

Ce n'est pas parce qu'on a pu calculer la dérivée d'une fonction que celle-ci est dérivable, mais parce que la fonction est dérivable qu'on peut calculer sa dérivée.

Remarque 3.1

Si $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ tend vers l'infini lorsque $\Delta x \rightarrow 0$ on dit que la dérivée est infinie au point x_0 et la tangente au point x_0 à (C) fait un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec l'axe Ox .

Remarque 3.2

Il se peut que la dérivée diffère suivant que Δx tend vers zéro par valeurs positives ou négatives. On dit que la fonction admet, au point considéré M , une dérivée à droite et une dérivée à gauche qu'on note $f'(x_0^+)$ et $f'(x_0^-)$. Au point M d'abscisse x_0 la courbe (C) admettra deux tangentes de pentes différentes : M est un point **anguleux**.

à **Exemple 3.5** La fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$, mais elle est dérivable à gauche et à droite :

$$\blacksquare f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \Big|_{x > 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = +1$$

$$\blacksquare f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \Big|_{x < 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Le point $(0, 0)$ est un point anguleux.

Théorème 3.1 Si une fonction f est dérivable en $x = x_0$ alors elle est continue pour $x = x_0$.

Démonstration :

Soit $y = f(x)$ est une fonction dérivable lorsque $x = x_0$. On a

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On peut sûrement affirmer que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(f(x) - f(x_0)) \frac{x - x_0}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \times \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \times 0 = 0\end{aligned}$$

$$\text{de plus : } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = 0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Par conséquent la fonction f est continue pour $x = x_0$

Ainsi une fonction dérivable pour une valeur donnée est toujours continue pour cette valeur.

Mais attention la réciproque n'est pas vrai !

Une fonction continue pour une valeur donnée n'est pas toujours dérivable pour cette valeur

Ainsi $f(x) = |x|$ est continue au point 0 mais n'y est pas dérivable .

a) Dérivées des fonctions usuelles

En utilisant la définition de la dérivée, on démontre les dérivées suivantes :

Soit n est réel , a une constante réelle,

1. $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
2. $\frac{d}{dx} \cos(ax) = -a \sin(ax)$
3. $\frac{d}{dx} \sin(ax) = a \cos(ax)$
4. $\frac{d}{dx} \tan(ax) = a (\tan^2 ax + 1) = \frac{a}{\cos^2(ax)}$
5. $\frac{d}{dx} \cot(ax) = -a (\cot^2 ax + 1) = -\frac{a}{\sin^2(ax)}$
6. $\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$
7. $\frac{d}{dx} \ln(ax) = \frac{1}{x}$
8. $\frac{d}{dx} \sinh(ax) = a \cosh ax$
9. $\frac{d}{dx} \cosh(ax) = a \sinh ax$
10. $\frac{d}{dx} \tanh(ax) = a (1 - \tanh^2 ax)$
11. $\frac{d}{dx} \coth(ax) = a (1 - \coth^2 ax)$

3.2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Jusqu'à maintenant, nous avons utilisé la définition pour calculer la dérivée d'une fonction.

Cependant, il existe beaucoup de règles de dérivation qui abrègent les calculs et les rendent moins laborieux. Elles permettent d'évaluer directement les dérivées des fonctions algébriques et d'éviter ainsi les calculs difficiles fondés sur la définition.

Considérons les fonctions $u = u(x)$ et $v = v(x)$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$, on note u' et v' leurs fonctions dérivées et k une constante réelle.

On rappelle les propriétés suivantes :

1. Dérivée d'une **Constante** :

Si $f(x)$ est une fonction constante alors $f(x) = k$; k est un réel constant, $\forall x \in [a, b]$

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

$$f(x) = k = \text{const.} \iff f' = 0 \quad (3.6)$$

2. Dérivée d'une **Somme** : $f(x) = u(x) + v(x)$

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ &= u' + v' \end{aligned}$$

$$(u + v)' = u' + v' \quad (3.7)$$

3. Dérivée d'un **Produit des fonctions** : $f(x) = u(x)v(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x+h)v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)[u(x+h) - u(x)] + u(x+h)[v(x+h) - v(x)]}{h} \\ &= v(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ &= v(x)u'(x) + u(x)v'(x) \end{aligned}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (3.8)$$

S'entraîner à calculer des dérivées.

4. Dérivée d'une **Quotient** : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{h \times v(x+h) \times v(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x) - u(x)v(x)}{h \times v(x+h) \times v(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)[u(x+h) - u(x)] + u(x)[v(x) - v(x+h)]}{h \times v(x+h) \times v(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{1}{v(x+h)v(x)} \right] \left[v(x) \frac{[u(x+h) - u(x)]}{h} + u(x) \frac{[v(x) - v(x+h)]}{h} \right] \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{v(x+h)v(x)} \right] \left[v(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]}{h} - u(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[v(x+h) - v(x)]}{h} \right] \\
 &= \frac{1}{v^2(x)} (v(x)u'(x) - u(x)v'(x))
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (3.9)$$

5. Dérivée de l'**Inverse** : $f(x) = \frac{1}{u(x)}$

C'est une quotient $\frac{v(x)}{u(x)}$ avec $v(x) = 1$, donc $v' = 0$. On trouve d'après la formule précédente

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (3.10)$$

6. Dérivée d'une **Puissance** :

$f(x) = u^n(x)$, avec $u(x)$ est une fonction dérivable de dérivée u' et n un réel.

Déterminons la dérivée de cette fonction par récurrence, à partir de la dérivée du produit :

$$n = 2 \implies (u^2)' = (u \times u)' = u' \times u + u \times u' = 2u'u$$

$$n = 3 \implies (u^3)' = (u^2 \times u)' = 2u'u \times u + u^2 \times u' = 3u'u^2$$

⋮

$$n = m \implies (u^m)' = mu'u^{m-1}$$

$$n = m + 1 \implies (u^{m+1})' = u' \times (u^m) + u \times (mu'u^{m-1}) = (m+1)u'u^m$$

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \quad (3.11)$$

7. Dérivée d'une **Fonction composée** :

Soit f une fonction continue et dérivable par rapport à la variable u et si u est une fonction aussi continue et dérivable de la variable x , donc $f = f(u) = f(u(x)) = F(x)$. La dérivée de f par rapport à u sera notée f'_u et par rapport à x est f'_x , et u'_x est la dérivée de u par rapport à x .

$$\begin{aligned} f'_x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u \times u'_x, \text{ puisque } \Delta u \rightarrow 0 \text{ quand } \Delta x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$f'_x(u(x)) = f'_u u'_x \quad (3.12)$$

8. Dérivée d'une **Fonction implicite**

Supposons que la fonction $y = f(x)$ est définie, continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, si y et x sont liées entre elles par l'équation $F(x, y) = 0$, de telle façon que si on remplace y par $f(x)$, l'équation $F(x, y) = 0$ ne se transforme pas en une identité de x , alors, la fonction $f(x)$ est appelée fonction implicite définie par l'équation $F(x, y) = 0$.

La dérivée de F par rapport à x contient alors la dérivée de y par rapport à x .

ä **Exemple 3.6** Soit $F(x, y) = y^2 + x^2 - 9 = 0 \implies y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

$$F'(x, y) = 2yy' + 2x = 0 \implies y' = -\frac{x}{y} = \mp \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

9. Dérivée logarithmique

Si $f(x)$ est de la forme $f(x) = u^v$ alors on a : $\ln f = \ln(u^v) = v \ln u$

Dérivons les deux membres :

$$(\ln f)' = (v \ln u)' \iff \frac{f'}{f} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

Par suite $f' = f \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$ ou bien

$$\frac{d}{dx}(u^v) = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = v' u^v \ln u + u' v u^{v-1} \quad (3.13)$$

ä **Exemple 3.7** Soit $f(x) = e^{\sin x}$

$$\ln f = \sin x \implies \frac{f'}{f} = \cos x \implies f'(x) = \cos x e^{\sin x}$$

ä **Exemple 3.8** Soit $f(x) = \sin^{x^2} x$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{x^2} x) = 2x \sin^{x^2} x \ln(\sin x) + x^2 \frac{\cos x}{\sin x} \sin^{x^2} x$$

3.2.3 Relation liant les dérivées de deux fonctions réciproques

Soit $y = f(x)$ une fonction continue et strictement monotone et $x = g(y)$ sa fonction réciproque.

Si $y = f(x)$ admet une dérivée f'_x la dérivée de $g(y)$ sera : $g'(y) = \frac{1}{f'_x}$

En effet, donnons à x un accroissement Δx et soit Δy l'accroissement correspondant à y . Puisqu'on suppose y strictement montone, pour $\Delta x \neq 0$, Δy sera différent de zéro d'où :

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1}$$

Lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, Δy tendra également vers 0 puisque y est continue, et :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x} \quad (3.14)$$

3.2.4 Dérivées d'ordres supérieurs

La dérivée définie plus haut est une fonction de la variable x , donc elle est aussi dérivable si elle est continue, telle dérivée est la dérivée première de la fonction $f(x)$. Si cette dérivée $f'(x)$ a une dérivée $(f'(x))'$, alors cette dernière fonction représente la dérivée *seconde* de la fonction $f(x)$, on note $f''(x)$.

Ainsi on peut définir de dérivées d'ordre (n) notée $f^{(n)}(x)$

ä **Exemple 3.9** $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

3.3 Différentielle d'une fonction à une variable

Définition 3.6 Soit une fonction $x \rightarrow f(x) = y$ définie sur $[a, b]$ et dérivable au point $x_0 \in [a, b]$. On appelle différentielle de $f(x)$ la quantité infiniment petite df définie par :

$$df = f' dx \quad (3.15)$$

La dérivée de la fonction au point x est définie par $f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ pour $\Delta x \rightarrow 0$ tend vers un nombre déterminé $f'(x)$ et par conséquent, diffère de la dérivée d'une quantité infiniment petite α ;

$$\alpha \rightarrow 0 \text{ si } \Delta x \rightarrow 0$$

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f' + \alpha \implies \Delta f = f' \Delta x + \alpha \Delta x \implies \Delta f \rightarrow df = f' dx$ si $\Delta x \rightarrow dx \rightarrow 0$, et on déduit que la dérivée est le rapport des différentielles df et dx

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad (3.16)$$

3.3.1 Interprétation géométrique de la différentielle

Considérons un point $M(x, y)$ arbitraire de la courbe représentative d'une fonction $y = f(x)$, Soit α l'angle que fait la tangente au point M avec l'axe Ox (Fig.3). En donnant à x l'accroissement Δx , la fonction subit l'accroissement $\Delta y = NM_1$.

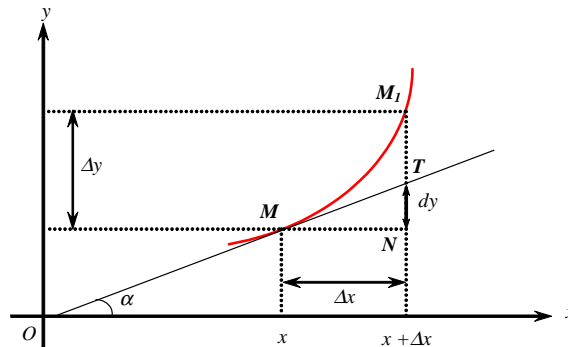


FIG. 3.3 – Géométrie de la différentielle

Le triangle MNT nous donne :

$$\tan \alpha = f'(x) = \frac{NT}{MN} = \frac{dy}{\Delta x}$$

$$\Delta y = NM_1 = NT + TM_1 \implies TM_1 = \Delta y - dy \rightarrow 0 \text{ si } \Delta x \rightarrow 0$$

Donc dy qui est la différentielle de y est égale à l'accroissement de l'ordonnée de la tangente à la courbe au point x donné.

3.3.2 Différentielle d'ordre supérieur

Soit la fonction $y = f(x)$. La différentielle de cette fonction est $df = f'dx$ mais seul le facteur $f'(x)$ est une fonction de x , dx est l'accroissement de x et il est indépendante de la valeur de x .

La différentielle seconde de f est $d(df(x)) = d(f'dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2$

$$d(df(x)) = d^2f(x) = f''(x)dx^2 \quad (3.17)$$

De même la différentielle d'ordre (n) est

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n \quad (3.18)$$

Donc la dérivée d'ordre (n) de la fonction $f(x)$ s'écrit

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} \quad (3.19)$$

3.4 Applications

La notion de dérivée est utile pour l'analyse des fonctions, en particulier les sens de variations, les extremums, la concavité, et aussi on peut utiliser la dérivé pour déterminer les équations des droites normale et tangente sur la courbe.

3.4.1 Tangente et normale sur une courbe

L'équation d'une droite, de pente m , et passe par un point $M_0(x_0, y_0)$ est :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

avec $m = \tan \alpha$ et α est l'angle que fait cette droite avec la direction de l'axe Ox (dans le sens trigonométrique)

a) Equation de la tangente et de la normale sur une courbe

Lorsqu'une courbe (C) est définie par son équation cartésienne de la forme $y = f(x)$, les considérations précédentes permettent d'affirmer que si f est dérivable en un point x_0 , la courbe (C) admet une tangente (T) au point $M_0(x_0, y_0)$ dont la pente est $m = \tan \alpha = f'(x_0)$

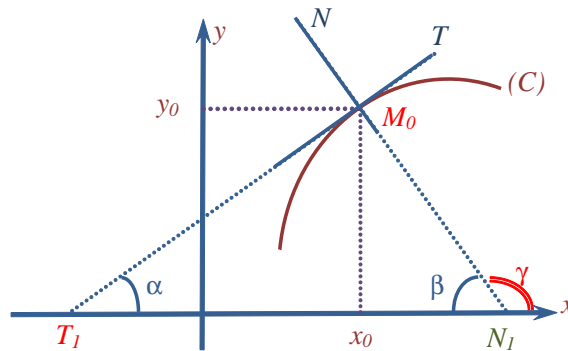


FIG. 3.4 – Tangente et normale

L'équation de la droite tangente en M_0 est de la forme :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (3.20)$$

D'autre part, la normale à la courbe (C) au point M_0 est la droite (N) perpendiculaire à la tangente (T) au point M_0 . La pente m_1 de (N) est $m_1 = \tan \gamma$, où γ est l'angle (γ) que fait cette droite avec l'axe Ox positif.

En considérant le triangle $T_1N_1M_0$ on trouve :

$$m_1 = \tan \gamma = \tan(\pi - \beta) = -\tan \beta \quad (3.21)$$

Or le triangle $T_1N_1M_0$ est rectangle en M_0 (figure 4), c'est-à-dire : $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \implies \tan \beta = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ par suite : $m_1 = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{f'(x_0)}$

L'équation de la normale à la courbe (C) au point M_0 s'écrit :

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (3.22)$$

b) Longueurs de sous-tangente et sous-normale

Définition 3.7 1. La longueur du segment tangente T_1M_0 comprise entre le point de tangente M_0 et l'axe Ox s'appelle longueur de la tangente.

2. La longueur du segment N_1M_0 est la longueur de la normale.

3. La projection du segment T_1M_0 sur Ox s'appelle sous-tangente et celle de N_1M_0 est la sous-normale.

La géométrie de la figure 4 nous permet de calculer les longueurs de :

– la sous-tangente (ℓ_{ST}) :

$$\ell_{ST} = \left| \frac{y_0}{\tan \alpha} \right| = \left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right| \quad (3.23)$$

– de la tangente ℓ_T :

$$\ell_T = \sqrt{y_0^2 + \ell_{ST}^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y_0}{f'(x_0)} \right)^2} \quad (3.24)$$

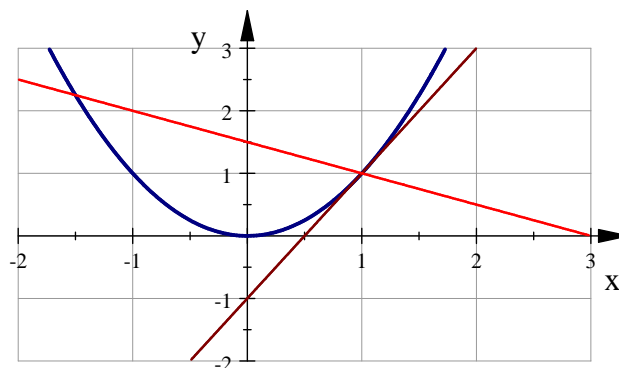
– de la sous-normale (ℓ_{SN}) :

$$\ell_{SN} = \left| \frac{y_0}{\tan \beta} \right| = |y_0 \times f'(x_0)| \quad (3.25)$$

– et de la normale (ℓ_N) :

$$\ell_N = \sqrt{y_0^2 + \ell_{SN}^2} = \sqrt{y_0^2 + (y_0 f'(x_0))^2} = |y_0 \sqrt{1 + f'^2(x_0)}| \quad (3.26)$$

Exemple 3.10 Soit la courbe (C) définie par l'équation $y = f(x) = x^2$, Déterminer les équations de la normale et de la tangente sur (C) au point $M_0(1, 1)$, calculer les longueurs de la tangente, la normale, la sous-normale et de la sous-tangente.



La courbe de $y = x^2$ et les droites normale et tangente au point $M_0(1, 1)$

On a $y = x^2 \implies y' = 2x \implies y'_0 = f'(x_0) = f'(1) = 2 \times 1 = 2$

L'équation de la tangente est :

$$y - 1 = 2(x - 1) \implies y = 2x - 1$$

L'équation de la normale :

$$y - 1 = -\frac{x - 1}{2} \implies y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Longueur de la tangente :

$$\ell_T = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y_0}{f'(x_0)}\right)^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Longueur de sous tangente :

$$\ell_{ST} = \left| \frac{y_0}{\tan \alpha} \right| = \left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

Longueur de sous-normale :

$$\ell_{SN} = |y_0 \times f'(x_0)| = |1 \times 2| = 2$$

Longueur de la normale :

$$\ell_N = \sqrt{y_0^2 + \ell_{SN}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

3.4.2 Analyse des fonctions

Analyser une fonction f , signifie :

- déterminer son domaine de définition ;
- déterminer les points critiques de f
- déterminer les intervalles de croissance ou décroissance de f ;
- déterminer les maximums et les minimums de f ;
- déterminer les intervalles de concavité ;
- déterminer les points d'inflexion de f
- Tracer le graphe

La dérivée d'une fonction nous renseigne sur certaines particularités de son graphique.

a) Extremum d'une fonction

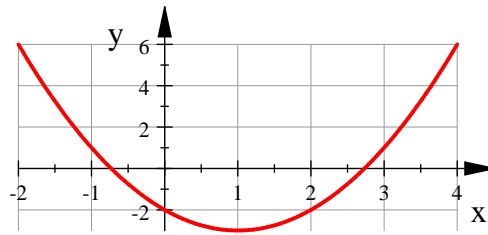
Si $f(x)$ est une fonction continue, sur un intervalle $[a, b]$, dans le cas où cette fonction n'est pas constante, ses valeurs sur $[a, b]$ ne sont pas égales par suite $f(x)$ peut prendre des valeurs plus grandes et des valeurs plus petites d'une certaine valeur donnée. Plus généralement cette fonction admet des valeurs maximales et des valeurs minimales sur $[a, b]$ on dit que $f(x)$ a des valeurs extrêmes ou extremums.

On rappelle les définitions suivantes, déjà notées dans le chapitre précédente :

Définition 3.8 On appelle maximum absolu d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a, b]$ sa valeur $M = f(c)$ en un point $c \in [a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b]$ on a $f(x) \leq f(c)$.

Définition 3.9 On appelle minimum absolu d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a, b]$ sa valeur $m = f(c)$ en un point $c \in [a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b]$ on a $f(x) \geq f(c)$.

ä **Exemple 3.11** $f(x) = x^2 - 2x - 2$ sur $[-2, 4]$



Les maximums absolus sont aux points $x = -2$ et $x = 4$: $M = f(-2) = f(4) = 6$

Un minimum absolu au point $x = 1$: $m = f(1) = -3$

Notons que sur $]-\infty, +\infty[$ $f(x) = x^2 - 2x - 2$ n'a pas un maximum absolu.

Théorème 3.2 Si $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ alors elle atteint ses extremums absolus, c'est-à-dire il existe des valeurs $x = x_1$; $f(x_1) = m$ et $x = x_2$; $f(x_2) = M$ telles que :

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\forall x \in [a, b].$$

Définition 3.10 On appelle maximum local de $f(x)$ le maximum $f(c)$ de $f(x)$ sur certain intervalle contenant le point c .

On appelle minimum local de $f(x)$ le minimum $f(c)$ de $f(x)$ sur certain intervalle contenant le point c .

Théorème 3.3 Si $f(x)$ admet un extremum local en un point c alors $f'(c) = 0$.

Démonstration :

Supposons, qu'au point c la fonction admet un maximum local $f(c)$ donc $f(x) \leq f(c) \implies f(x) - f(c) \leq 0$

Puisque la fonction est dérivable au point c alors on a :

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

mais d'autre part on a :

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \text{ car } f(x) - f(c) \leq 0 \text{ et } (x - c) \geq 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ car } f(x) - f(c) \leq 0 \text{ et } (x - c) \leq 0$$

Par suite $f'(c) = 0$.

Définition 3.11 Soit c un point du domaine de définition de la fonction f , on dit que c est un nombre critique de f si $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas.

ä **Exemple 3.12** Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^4} + 4\sqrt[3]{x}$
 $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$ est définie $\forall x \in \mathbb{R}$
 $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{4/3} + 4x^{1/3}) = \frac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$
 $f'(x) = 0$ si $x = -1$ et $f'(x) \nexists$ si $x = 0$ donc $x = -1, x = 0$ sont des nombres critiques

ä **Exemple 3.13** Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}$
 $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$ le domaine de définition est $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
 $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3 - x^2}\right) = -\frac{3x-2}{x^3(x-1)^2}$
 $f'(x) = 0$ si $x = \frac{2}{3} \in D$ donc c est un nombre critique
 $f'(x) \nexists$ si $x = 0 \notin D$ et $x = 1 \notin D$.

Théorème 3.4 Si $f(c)$ est un extremum relatif de la fonction f alors c est un nombre critique.

Mais attention la réciproque n'est pas vraie, si le point c est un nombre critique, $f(c)$ n'est pas nécessairement un extremum relatif.

Pour obtenir les extremums relatifs d'une fonction, il suffit de trouver les nombres critiques de la fonction puis de déterminer ensuite la nature de chaque nombre critique à l'aide d'un test appelé test de la dérivée première.

Théorème 3.5 Soit f une fonction continue sur $]a, b[$, et c est le seul nombre critique de f sur $[a, b]$

- si $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$ alors $f(c)$ est un maximum relatif.
- si $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$ alors $f(c)$ est un minimum relatif.
- autrement $f(c)$ n'est pas un extremum relatif

b) Sens de variation d'une fonction dérivable

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction sur un intervalle I nous sommes besoin de savoir les segments où la fonction est croissante ou décroissante. Un test de sens de variation a lieu en utilisant la dérivée première de la fonction.

Soit $f(x)$ un fonction dérivable sur l'intervalle I et $h > 0$. La dérivée de $f(x)$ en un point x est définie par

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Puisque $h \geq 0$ donc $x + h > x$.

On distingue les deux cas :

- Si $f(x)$ est croissante alors on a $f(x+h) > f(x)$ c'est-à-dire $f(x+h) - f(x) > 0$ par suite $f'(x) > 0$.
- Si $f(x)$ est décroissante, alors on a $f(x+h) - f(x) < 0$ pour $x+h > x$ et de même $f'(x) < 0$.

D'où le théorème :

Théorème 3.6 Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

- Si $f'(x) > 0$ en tout point $x \in]a, b[$ alors $f(x)$ est strictement croissante sur $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$ en tout point $x \in]a, b[$ alors $f(x)$ est strictement décroissante sur $[a, b]$

ä **Exemple 3.14** Etudions la variation de la fonction $f(x) = x^3 - 12x - 5$

La dérivée de $f(x)$ est $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$

Les points critiques sont tels que $f'(x) = 0$ c'est-à-dire pour $x = \pm 2$.

Dans ces points on a :

$$f(2) = 8 - 24 - 5 = -21 : \text{Minimum local } (2, -21)$$

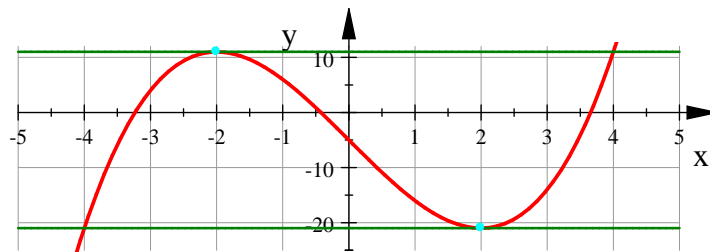
$$f(-2) = -8 + 24 - 5 = 11 : \text{Maximum local } (-2, 11)$$

- Pour $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[: f'(x) > 0$ alors $f(x)$ est croissante
- Pour $x \in]-2, 2[: f'(x) < 0 \implies f(x)$ est décroissante.

En effet :

x	$-\infty$	\longrightarrow	-2	\longrightarrow	2	\longrightarrow	$+\infty$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+2)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	\nearrow	\nearrow	$\max = 11$	\searrow	$\min = -21$	\nearrow	\nearrow

La variation de $f(x)$ est bien illustrée sur sa courbe représentative



c) Concavité de la courbe

Dans une région donnée, le graphique d'une fonction peut être concave vers le haut (concave) ou concave vers le bas (convexe) dépendant du comportement des droites tangentes au graphique

Soit $f(x)$ une fonction continue et dérivable sur $]a, b[$ et soit $c \in]a, b[$ et $f'(c)$ existe.

Définition 3.12 (concavité vers le haut) On dit que la courbe de f est **concave** en c , si $\forall x \in]a, b[$, la courbe de la fonction f est **au-dessus** de la droite tangente en $x = c$.

Définition 3.13 (concavité vers le bas) On dit que la courbe de f est **convexe** en c , si $\forall x \in]a, b[$, la courbe de la fonction f est **au-dessous** de la droite tangente en $x = c$.

Théorème 3.7 Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ soit $c \in]a, b[$ et $f'(c), f''(c)$ existent.

1. Si $f''(c) > 0$ alors le graphique de f est concave vers le haut au point $(c, f(c))$.
2. Si $f''(c) < 0$ alors le graphique de f est concave vers le bas au point $(c, f(c))$.

- Si la fonction f est dérivable sur $]a, b[$, alors pour toute valeur de l'intervalle, il existe une droite tangente au graphique de la fonction f ayant pour pente $f'(x)$. Si de plus,
- Si $f''(c) > 0$ alors f' est une fonction croissante en c , autour de c les valeurs des pentes des droites tangentes sur le graphique de la fonction f vont en augmentant, le graphique de la fonction f est concave vers le haut dans le voisinage de c , par conséquent, il le sera au point $(c, f(c))$
 - Si $f''(c) < 0$ alors f' est une fonction décroissante en c , autour de c les valeurs des pentes des droites tangentes sur le graphique de la fonction f vont en diminuant, le graphique de la fonction f est concave vers le bas dans le voisinage de c , par conséquent, il le sera au point $(c, f(c))$

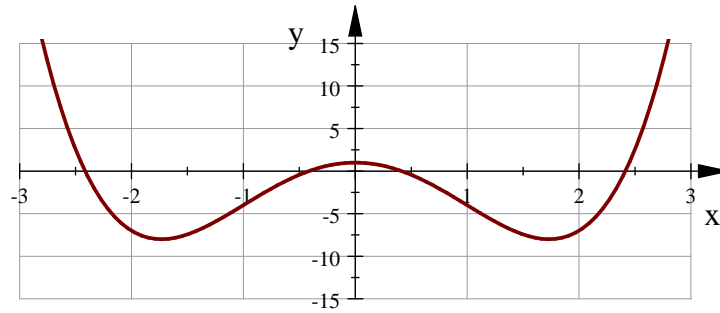
Théorème 3.8 Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$

- Si $f''(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, alors le graphique de la fonction f est concave vers le haut pour toute valeur de l'intervalle $]a, b[$.
- Si $f''(x) < 0, \forall x \in]a, b[$, alors le graphique de la fonction f est concave vers le bas pour toute valeur de l'intervalle $]a, b[$.

Définition 3.14 Soit c une valeur du domaine d'une fonction f . Si $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ n'existe pas alors c est appelé nombre de transition de la fonction f .

Définition 3.15 Le point $(c, f(c))$ est un point d'inflexion du graphique de la fonction f si elle est continue en c et il y a changement de concavité de part et d'autre de $x = c$, alors $f''(x)$ change de signe de part et d'autre de $x = c$.

- ä **Exemple 3.15** Considérons la courbe représentative de la fonction $y = x^4 - 6x^2 + 1$
- $$y'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$$
- en $x = 0$ un maximum local et en $x = \pm\sqrt{3}$ minimums locaux
- $$y''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1)$$
- $$y''(x) = 0 \text{ en } x = 1 \text{ et } x = -1$$
- $$y'' < 0 \text{ si } x \in]-1, +1[\implies \text{concavité vers le bas}$$
- $$y'' > 0 \text{ si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\implies \text{concavité vers le haut.}$$



3.4.3 Optimisation

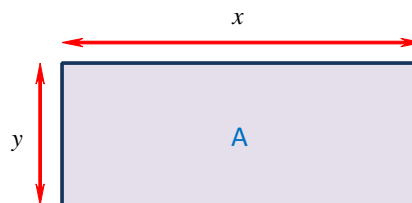
Souvent en industrie on cherche de construire des objets des dimensions optimales, dans la plupart des cas on cherche les valeurs maximales de ces grandeurs. Telle question trouve la solution en utilisant la notion de dérivée.

Nous avons appris à déterminer les extremums d'une fonction donnée ainsi que son domaine de définition. Dans le cas des problèmes d'optimisations, nous allons construire la fonction à optimiser et à déterminer selon le cas le maximum ou le minimum de la fonction.

Les étapes à suivre pour résoudre un problème d'optimisation sont :

1. Mathématiser le problème, c'est-à-dire :
 - (a) Définir les variables nécessaires et les relations entre elles.
 - (b) Déterminer la quantité à optimiser sous forme d'une fonction et exprimer cette fonction à l'aide d'une seule variable.
 - (c) Trouver le domaine de définition de la fonction et faire une étude de continuité sur ce domaine.
2. Analyser la fonction à optimiser : Trouver les nombres critiques de la fonction puis étudier son comportement à l'aide du test de la dérivée première ou du test de la dérivée seconde.
3. Donner une représentation graphique du problème si c'est possible
4. Formuler la réponse du problème.

à **Exemple 3.16** Supposons qu'on a une file de longueur a et on demande de construire, à l'aide de cette file un rectangle, quelle est l'aire maximale que peut-on avoir avec telle file ?.



Posons x la longueur du rectangle et y sa largeur, et $x \in [0, a]$. L'aire du rectangle est $A = xy$, le périmètre est : $2x + 2y = a$, puisque a est constante donc on peut écrire $2y = a - 2x$ soit : $A = x \left(\frac{a - 2x}{2} \right) = \frac{1}{2}ax - x^2$

Pour trouver les valeurs extremas de A on fait calculer sa dérivée A' et on détermine les valeurs de x qui annulent A'

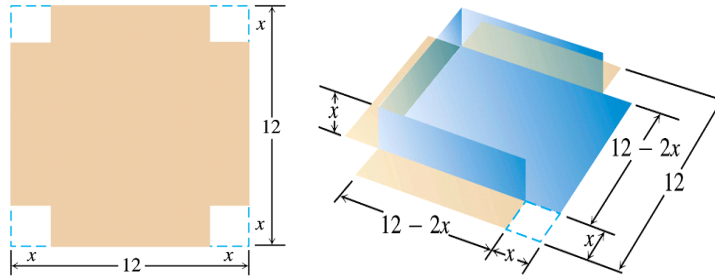
$$A' = \frac{dA}{dx} = -2x + \frac{a}{2}$$

$$A' = 0 \implies x = \frac{a}{4} \text{ par suite } y = \frac{a - 2x}{2} = \frac{a - a/2}{2} = \frac{a}{4}$$

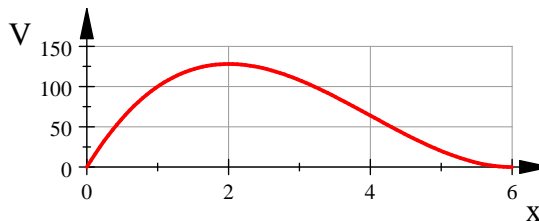
$$\text{la valeur maximale de } A \text{ est } A = \frac{a^2}{16}$$

Les valeurs minimales sont pour $x = 0$ et $x = a$: $A(0) = A(a) = 0$

à **Exemple 3.17** Soit à construire une boîte ouverte en forme de parallélépipède de hauteur x , à partir d'une plaque carrée de longueur de côté 12 cm. Quelle hauteur faut-il choisir pour avoir un volume maximal. (d'après Thomas' calculus, 11ed. pearson education)



En coupant la plaque sous la forme indiquée, les dimensions de la base seront $(12 - 2x) \times (12 - 2x)$ et $x \in [0, 6]$. Le volume de la boîte est $V = V(x) = x(12 - 2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x$



$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x - 2)(x - 6) \implies \frac{dV}{dx} = 0 \text{ si } x = 6 \text{ ou } x = 2$$

La valeur maximale de V est pour $x = 2$: $V(2) = 2(12 - 4)^2 = 128$

Les valeurs minimales sont pour $x = 0$ et $x = 6$: $V(0) = V(6) = 0$

3.5 Développement limité

La notion de développement limité est une des plus utiles dans la recherche des limites et l'étude d'une fonction au voisinage d'un point. Elle vient compléter celle de fonction équivalente, insuffisante dans certains cas où les équivalents peuvent disparaître par addition. Elle consiste à remplacer, au voisinage d'un point, une fonction régulière, c'est-à-dire admettant des dérivées jusqu'à un certain ordre, par un polynôme, fonction beaucoup plus simple à étudier. Elle se déduit des formules fondamentales de Taylor et de Maclaurin. Il est indispensable de connaître les développements limités des fonctions usuelles.

Dans de nombreux problèmes, on doit rechercher l'existence d'extremums d'une fonction et parfois étudier sa convexité. Il est très important de noter que ces deux notions ne sont pas liées a priori à celle de dérivée, association que l'on a souvent tendance à faire trop rapidement. Elles sont définies de façon totalement indépendante. Dans un certain nombre de cas, moins rares qu'on pourrait le penser, une fonction f présente un extremum en un

point x_0 où justement elle n'est pas dérivable. Cet extremum ne pourra donc se trouver que par l'étude directe du signe de $f(x) - f(x_0)$, qui doit rester constant quand x reste au voisinage de x_0 .

3.5.1 Théorèmes relatifs aux fonctions dérivables

Théorème 3.9 (Théorème de Rolle) Si $f(x)$ est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ et $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :

$f(x)$ continue sur $[a, b]$ donc elle est bornée sur cet intervalle et donc elle admet une borne supérieure (M) et une borne inférieure (m).

– Si $M = m \iff f(x) = \text{constante} = f(a) = f(b) = 0 \implies f'(x) = 0$,
par suite $\forall c \in [a, b], f'(c) = 0$.

– Si $M \neq m$, supposons que $M > 0$ et que $f(c) = M$, ($c \neq a$ et $c \neq b$). Donnons à c l'accroissement Δx qui peut être positif ou négatif, mais quelque soit le signe de Δx , on a $f(c + \Delta x) \leq f(c) = M$ c'est-à-dire $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \Delta x \geq 0 \implies f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \\ \text{Si } \Delta x \leq 0 \implies f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \end{array} \right\} \implies f'(c) = 0$$

Ce théorème traduit le fait que la fonction f présente au moins un minimum ou un maximum sur l'intervalle ouvert.

Géométriquement le théorème de Rolle signifie qu'il existe au moins un point c de l'intervalle $[a, b]$ distinct de a et b dans lequel la tangente est parallèle à l'axe ox .

Il peut exister plusieurs nombres c tels que $f'(c) = 0$

Théorème 3.10 (Théorème de Lagrange : Théorème des accroissements finis) Si $f(x)$ est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, il existe, au moins, un point $c \in [a, b]$, $a < c < b$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \quad (3.27)$$

C'est la formule des accroissements finis

Démonstration :

Considérons une fonction $F(x)$ qui vérifie le théorème de Rolle : $F(a) = F(b) = 0$

Posons $Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q$$

$F(x)$ vérifie le théorème de Rolle donc il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$, d'autre part $F'(x) = f'(x) - Q$, donc au point c on a $F'(c) = f'(c) - Q = 0$ alors

$$f'(c) = Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

○ Ce théorème est dit parfois *théorème de la valeur moyenne*.

C'est ce théorème qui permet de montrer que si une fonction a une dérivée positive ou nulle sur un intervalle, alors elle est croissante

Posons $\theta = \frac{c - a}{b - a}$. Puisque c vérifie la condition $a < c < b$, alors $0 < c - a < b - a$ ou $c - a = \theta(b - a)$ où θ est un nombre positif compris entre 0 et 1. ($0 < \theta < 1$) alors

$$c = a + \theta(b - a)$$

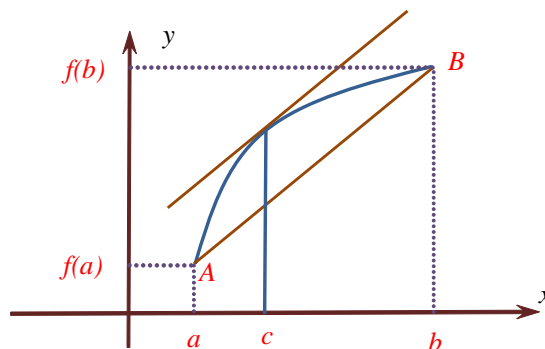
et on écrit formule des accroissements finis sous la forme :

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(a + \theta(b - a)) \quad (3.28)$$

On peut écrire différemment ce résultat en faisant apparaître la longueur h de l'intervalle $[a, b]$ et en posant $a = x$. Le point c de l'ouvert peut alors s'écrire sous la forme $c = x + \theta h$, où θ est un nombre, dépendant de h , tel que $0 < \theta < 1$. Avec ces nouvelles notations, la formule des accroissements finis devient :

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h) \quad (3.29)$$

L'égalité $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ affirme qu'au point d'abscisse c , la tangente est parallèle à (AB) joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.



Théorème 3.11 (Théorème de Cauchy : Rapport des accroissement de deux fonctions) Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues et dérivables sur l'intervalle $[a, b]$ et $g'(x)$ ne s'annule pas sur $[a, b]$ et $g(b) - g(a) \neq 0$, il existe alors un point $c \in]a, b[$, $a < c < b$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (3.30)$$

Démonstration :

Définissons Q par

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

et considérons la fonction $F(x)$ qui vérifie le théorème de Rolle

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[g(x) - g(a)]$$

On remarque que $F(a) = F(b) = 0$, donc il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$, mais $F'(x) = f'(x) - Qg'(x)$ par suite $F'(c) = f'(c) - Qg'(c) = 0$, d'où :

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Théorème 3.12 (Théorème de L'Hospital) Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions satisfaisant aux conditions du théorème de Cauchy sur le segment $[a, b]$ et $f(a) = g(a) = 0$, et si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (3.31)$$

Démonstration :

D'après le théorème de Cauchy il existe un point $c \in [a, x]$ tel que :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

puisque $f(a) = g(a) = 0$. Si $x \rightarrow a$, c tend également vers a donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Remarque 3.3

1. Si $f'(a) = g'(a) = 0$ et les dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$ satisfont les conditions de Cauchy, on peut de nouveau appliquer la règle de L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad (3.32)$$

2. Le théorème de l'Hospital peut être aussi appliqué lorsque $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.
3. D'une façon analogue on peut démontrer que la règle de l'Hospital est valable dans le cas où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

ä **Exemple 3.18 :**

$$\begin{aligned}
 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \\
 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan^2 x) - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 (\tan x + \tan^3 x)}{\sin x} \quad (2\text{eme fois R.H}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 (1 + \tan^2 x + 3 \tan^2 x (1 + \tan^2 x))}{\cos x} = 2 \quad (3\text{eme fois R.H})
 \end{aligned}$$

3.5.2 Formules de Taylor

Si f est une fonction dérivable jusqu'à un certain ordre, le résultat précédent se généralise à l'aide des dérivées successives. Les formules de Taylor se différencient par un reste qui peut s'exprimer sous différentes formes.

Définition 3.16 On dit qu'une fonction f est de classe C^n sur l'intervalle I si elle est n fois continûment dérivable sur I , on dit aussi que $f \in C^n(I)$.

Si $\forall n \in \mathbb{N} : f \in C^n(I)$ on dit que f est de classe C^∞ .

a) Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 3.13 Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, admettant n dérivées successives continues sur cet intervalle, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur l'ouvert $]a, b[$, alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \quad (3.33)$$

Il s'agit du développement de la fonction f au point a par la formule de Taylor à l'ordre $(n+1)$, où le dernier terme se nomme *reste de Lagrange*.

Le principe est le même que pour le théorème des accroissements finis. Pour $n=0$ on obtient la formule des accroissements finis.

En fait c'est une approximation de $f(b)$ à l'aide d'un polynôme de degré n .

Démonstration :

Soit la fonction

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - A(b-x)^{n+1}$$

$\varphi(x)$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et l'on peut choisir la constante A de façon à ce que $\varphi(a) = 0$. Comme $\varphi(b) = 0$, le théorème de Rolle entraîne l'existence de $c \in]a, b[$ vérifiant $\varphi'(c) = 0$

Calculons $\varphi'(x)$:

On a :

$$- f'(b) = 0$$

$$\begin{aligned}
 - \left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k \right)' &= \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - k \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^{k-1} \\
 &= \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1}
 \end{aligned}$$

$$- \left(A (b-x)^{n+1} \right)' = -A (n+1) (b-x)^n$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \varphi'(x) &= - \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} + A (n+1) (b-x)^n \\
 &= - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + A (n+1) (b-x)^n
 \end{aligned}$$

$$\varphi'(c) = - \frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + A (n+1) (b-c)^n = 0 \text{ alors } A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

En posant $h = b - a$ la formule de Taylor s'écrit

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad (3.34)$$

avec $0 < \theta < 1$

b) Formule de Taylor-Young

Théorème 3.14 Soit $f(x)$ est une fonction définie et continue sur $]a, b[$ et elle est n fois dérivable sur $]a, b[$, alors on a $\forall x \in]a, b[$ on peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon((x-x_0)) \quad (3.35)$$

où $\varepsilon((x-x_0))$ est une fonction qui tend vers 0 quand $(x-x_0)$ tend vers 0.

Remarque 3.4

La quantité $(x-x_0)^n \varepsilon((x-x_0))$ s'écrit parfois $O((x-x_0)^{n+1})$

En particulier, pour $x_0 = 0$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^{n+1}) \quad (3.36)$$

Cette égalité est également connue sous le nom *formule de MacLaurin*

3.5.3 Développements limités

Définition 3.17 Soit f une fonction numérique définie et continue au voisinage de $x_0 \in [a, b]$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$) s'il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_n tel que : $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + O((x - x_0)^{n+1}) \quad (3.37)$$

le polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$, est appelé la partie principale ou tout simplement le développement limité à l'ordre n en x_0 de f

Si la fonction f est indéfiniment dérivable sur un intervalle contenant x_0 , la formule de Taylor-Young nous donne un développement limité à n'importe quel ordre n avec

$$a_0 = f(x_0) \text{ et } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

En particulier au voisinage de $x_0 = 0$ le développement limité d'ordre n de la fonction n fois dérivable est

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + O(x^{n+1}) \quad (3.38)$$

Théorème 3.15 Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage d'un point x_0 , ce développement est unique.

Démonstration :

Posons $h = x - x_0$ et supposons que f admette deux développements limités différents à l'ordre n

$$f(x) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + O(h^{n+1}) = b_0 + b_1h + \dots + b_nh^n + O(h^{n+1})$$

Soit k le plus petit indice i tel que $a_i \neq b_i$. On a alors :

$$f(x) = a_k h^k + a_{k+1} h^{k+1} + \dots + a_n h^n + O(h^n) = b_k h^k + b_{k+1} h^{k+1} + \dots + b_n h^n + O(h^n)$$

$$\text{alors } (a_k - b_k) h^k + (a_{k+1} - b_{k+1}) h^{k+1} + \dots + (a_n - b_n) h^n + O(h^n) = 0$$

ou encore :

$$(a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1}) h + \dots + (a_n - b_n) h^{n-k} + O(h^{n-k}) = 0$$

On voit que $(a_k - b_k) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Remarque 3.5

L'unicité du développement limité d'une fonction en un point ne doit pas laisser penser qu'un développement limité caractérise entièrement la fonction au voisinage de ce point,

Remarque 3.6

Si une fonction f admet un DL à l'ordre 2 en x_0 , f (ou son prolongement) n'est pas forcément deux fois dérivable en x_0 . Par exemple $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ au point 0.

a) Exemples du développement limité des fonctions usuelles

Les exemples donnés ci-dessous montrent que la formule de MacLaurin permet dans certains cas d'obtenir le développement limité d'une fonction.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x) \quad (3.39)$$

1. $\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$
2. $\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$
3. $\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$
4. $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + O(x^{n+1}) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (|x| < 1)$
5. $\sinh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$
6. $\cosh(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$
7. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$
($|x| < 1$)
8. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + O(x^{n+1}) \quad (|x| < 1)$
9. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \frac{x^2}{2!} + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}\right) \frac{x^3}{3!} + \dots$

b) Opérations

Lorsque $f(x)$ est une fonction compliquée, le calcul des dérivées successives de f devient souvent pénible lorsque l'ordre s'élève et la méthode de la formule de MacLaurin risque de conduire à des calculs inextricables si on veut avoir le développement limité de f jusqu'à un ordre suffisamment grand. Aussi, souvent on déduit le développement limité de f de ceux des fonctions plus simples qui permettent de définir f par des opérations usuelles

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions ont des développements limités à l'ordre n au point $x_0 = 0$. On a donc :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + O(x^{n+1})$$

et

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + O(x^{n+1})$$

1. **Somme des DL :** La fonction $(f+g)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, obtenu en ajoutant les développements limités d'ordre n de f et de g .

$$(f+g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + O(x^{n+1}) \quad (3.40)$$

ä **Exemple 3.19** Si $f(x) = \sin x + \cos x$ alors le $DL_5(0)$ de $f(x)$ est :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon_1(x) \right) + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_2(x) \right) \\ &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + x^5 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

2. **Produit des DL :** La fonction fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, obtenu en conservant tous les termes de degré inférieur ou égal à n du produit des développements limités d'ordre n de f et de g .

$$(fg)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n + O(x^{n+1}) \quad (3.41)$$

ä **Exemple 3.20** Considérons la fonction $g(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$ et calculons le $DL_3(0)$ de g

$$\text{On a } e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + O(x^4)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) \right) \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + O(x^4) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + O(x^4) \end{aligned}$$

3. **Quotient des DL :** La fonction $h = \frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$:

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + O(x^{n+1})$$

on a donc $f = hg$ c'est-à-dire :

$$a_0 = b_0c_0, a_1 = b_0c_1 + b_1c_0, \dots, a_n = \sum_{i=0}^n b_i c_{n-i}$$

ces égalités déterminent de proche en proche les nombres c_n :

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}, c_1 = \frac{a_1 - b_1c_0}{b_0}, \dots, c_n = \frac{1}{b_0} \left(a_n - \sum_{i=0}^n b_i c_{n-i} \right) \quad (3.42)$$

ä **Exemple 3.21** Calculons le développement limité à l'ordre 4 de $h(x) = \tan x$.

$$\text{Par définition } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$

$$\text{alors : } \tan x = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + O(x^5)$$

D'où :

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5) &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\right) (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + O(x^5)) \\ &= c_0 + c_1x + \left(c_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x^2 + \left(c_3 - \frac{1}{2}c_1\right)x^3 + \left(\frac{1}{24}c_0 - \frac{1}{2}c_2 + c_4\right)x^4 + O(x^5) \end{aligned}$$

Par identification on trouve :

$$\begin{aligned} c_0 = 0 \quad c_1 = 1 \quad c_2 - \frac{1}{2}c_0 = 0 &\implies c_2 = 0 \\ \left(c_3 - \frac{1}{2}c_1\right) = -\frac{1}{6} &\implies c_3 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ \left(\frac{1}{24}c_0 - \frac{1}{2}c_2 + c_4\right) = 0 &\implies c_4 = -\frac{1}{24}c_0 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$$

4. **Composition des DL** : Si $g(0) = 0$, la fonction $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ a un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière s'obtient en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans

$$a_0 \left(b_1x + \dots + b_nx^n + O(x^{n+1}) \right) + \dots + a_n \left(b_1x + \dots + b_nx^n + O(x^{n+1}) \right) \quad (3.43)$$

Il faut bien prendre en garde à la condition $g(0) = 0$ quand on substitue.

à **Exemple 3.22** Calculons le $DL_4(0)$ de $\ln(\cos x)$.

Soit $u(x) = \cos x$.

Remarqu'on que $u(0) \neq 0$, on peut prendre une fonction $v(x)$ telle que $v(0) = 0$, soit

$$v(x) = 1 - u = 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

$$\begin{aligned} \ln(v) &= \ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + O(u^5) \\ &= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^5)\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^5)\right)^3 - \\ &\quad \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^5)\right)^4 + O(x^5) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + O(x^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + O(x^5) \end{aligned}$$

5. **Dérivation des DL** : Si $f(x)$ est de classe C^{n+1} alors f' admet $DL_n(0)$, obtenu par dérivation terme à terme de $DL_n(0)$ de f

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + O(x^n) \quad (3.44)$$

ä **Exemple 3.23** Si on demande de calculer le $DL_2(0)$ de $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, on peut le déduire de celui de $\tan x$ par dérivation :

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + x^2 + O(x^3)$$

6. **Intégration des DL** : Si f admet un $DL_n(0)$ et F est une primitive de f sur l'intervalle I , autrement dit F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$, alors F admet un $DL_{n+1}(0)$, obtenu en intégrant le DL de f

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + O(x^{n+2}) \quad (3.45)$$

N'oublier pas $F(0)$.

ä **Exemple 3.24** Soit à calculer le $DL_7(0)$ de $F(x) = \arctan x$.

La dérivée de $\arctan x$ est $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On sait que $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k$

Alors : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + O(x^7)$

Par suite :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + O(x^7)$$

En intégrant la dernière formule avec $F(0) = 0$, on trouve

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + O(x^9).$$

7. **Parités des DL** : Si une fonction est paire (resp. impaire), alors que son $DL_n(0)$ ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de x .

ä **Exemple 3.25** :

$\sin x$ est impaire :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$\cos x$ est paire :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

Pour calculer un développement limité à l'ordre n d'une fonction f :

Procédez par étapes en commençant par développer les différentes fonctions qui composent f ; tous ces développements doivent absolument être au même ordre n .

Si vous calculez un développement limité de $f \circ g$ en 0 à partir des développements de f et g en 0 , n'oubliez pas de vérifier la condition $g(0) = 0$.

Disposez clairement vos calculs : vous y repérez plus facilement les fautes éventuelles.

Si les calculs conduisent à une diminution de l'ordre (par exemple à cause d'une division par x dans un développement en 0), reprendre depuis le début avec des développements à un ordre plus élevé.

Si l'on intègre un développement limité ou si l'on multiplie par x un développement en 0 , on gagne un ordre ; en multipliant par x^2 , on gagne deux ordres, etc.

c) Développements limités généralisés

Définition 3.18 Soit f une fonction définie au voisinage de 0 ; sauf peut être en 0 : Si la fonction $x^p f(x)$ admet un D.L au voisinage de 0 :

$$x^p f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + O(x^{n+1})$$

alors

$$f(x) = \frac{c_0}{x^p} + \frac{c_1}{x^{p-1}} + \frac{c_2}{x^{p-2}} + \dots + c_n x^{n-p} + O(x^{n+1}) \quad (3.46)$$

on dit alors que f admet un D.L généralisé au voisinage de 0 .

ä **Exemple 3.26** La fonction $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$ n'admet pas un D.L au voisinage de 0 ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$). Par contre

$$x f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)$$

$$d'où f(x) = \frac{1}{x} (1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)) = \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + O(x^3)$$

ä **Exemple 3.27** $f(x) = \cot x$ ($\lim_{x \rightarrow 0} \cot x = +\infty$)

$$x \cot x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 + O(x^8) = \frac{x \cos x}{\sin x}$$

$$x \cos x = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + O(x^7)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7)$$

$$et \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + O(x^7)$$

$$x \cot x = \left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + O(x^7) \right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + O(x^7) \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 + O(x^7)$$

$$D'où : \cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 + O(x^5)$$

d) Développements limités aux voisinage de l'infini

Définition 3.19 Une fonction $f(x)$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de l'infini si la fonction $F(t) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0.

Si il en est ainsi on a :

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + O(t^{n+1}) \quad (3.47)$$

d'où :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \quad (3.48)$$

ä **Exemple 3.28** D.L. de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}$ d'ordre 2 au voisinage de l'infini.

$$F(t) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1 - x^2}{2x + 1}$$

Le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1+2t}$ est : $\frac{1}{1+2t} = 1 - 2t + 4t^2 + O(t^3)$

$$F(t) = (1 - t^2)(1 - 2t + 4t^2 + O(t^3)) = 1 - 2t + 3t^2 + O(t^3)$$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

ä **Exemple 3.29** D.L. généralisé de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ au voisinage de l'infini.

En posant $t = \frac{1}{x}$ on se ramène au voisinage de 0

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{t^3}(1 - t)} = \frac{1}{t}(1 - t)^{1/3}$$

$tF(t) = (1 - t)^{1/3}$ admet un D.L. au voisinage de 0. A l'ordre 4 on obtient :

$$(1 - t)^{1/3} = 1 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 - \frac{5}{81}t^3 + O(t^4)$$

$$F(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}t - \frac{5}{81}t^2 + O(t^3)$$

$$f(x) = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} - \frac{5}{81x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

3.5.4 Utilisations des développements limités

Les développements limités sont utilisés dans le calcul de limites, dans la construction de la courbe représentative d'une fonction, notamment pour préciser la position relative de la courbe et d'une asymptote.

a) Infiniment petit, infiniment grand, Fonctions équivalentes

Définition 3.20 On dit que $f(x)$ est **infiniment petit** au voisinage de 0 si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Par exemple : $x^3, \sin x, x \ln x$ sont infiniment petit au voisinage de 0.

Définition 3.21 On dit que $f(x)$ est **infiniment grand** au voisinage de 0 si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers 0.

Par exemple $\frac{1}{x}, xe^{1/x}$ sont des infiniment grand positive au voisinage de 0.

Définition 3.22 Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont équivalentes au voisinage de 0 si on a :

$$f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)) \quad (3.49)$$

où $\varepsilon(x)$ est un infiniment petit quand x tend vers 0.

On utilise les notations :

$$f \underset{0}{\sim} g \quad \text{ou} \quad f = g + o(g)$$

Remarque 3.7

Si $g(x)$ ne s'annule pas dans un voisinage de $x = 0$ la relation $f \sim g$ équivaut encore à la propriété $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$.

Définition 3.23 On dit que $f(x)$ est **infiniment petit d'ordre n** par rapport à x si l'on a : $f(x) \sim ax^n$ avec $n > 0$ et $a \neq 0$.

Lorsqu'il est ainsi on dit que ax^n est la partie principale de l'infiniment petit f .

Il est facile d'obtenir cette partie principale lorsque f a un développement limité.

Théorème 3.16 La relation entre fonctions équivalentes vérifie les propriétés suivantes :

1. $f \underset{0}{\sim} g$ et $f' \underset{0}{\sim} g' \implies ff' \underset{0}{\sim} gg'$ et $\frac{f}{f'} \underset{0}{\sim} \frac{g}{g'}$
2. Si $\lim_{x \rightarrow 0} f = \ell$ et $f \underset{0}{\sim} g$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} g = \ell$
3. $(f + f')$ n'est pas équivalente à $(g + g')$

ä Exemple 3.30 :

$$\sin x \underset{0}{\sim} x$$

$$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\tan x \underset{0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$$

$$5x^2 - x^3 \underset{0}{\sim} 5x^2$$

Remarque 3.8

D'une façon analogue on définit les fonctions infiniment grands équivalents, en particulier on a

$$f(x) = g(x) \left(1 + \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right) \right) \quad (3.50)$$

avec $\varepsilon \left(\frac{1}{x} \right)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{x}$

On note

$$f \underset{\infty}{\sim} g \quad (3.51)$$

b) Calcul de limites

Nous avons vu pour les fonctions que les théorèmes énoncés sur les limites ne permettent pas d'obtenir, par exemple, la limite de quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ lorsque $f(x)$ et $g(x)$ tendent tous les deux vers 0 ou tous les deux vers ∞ . de même la limite de la différence $f(x) - g(x)$ n'est pas donnée par un théorème général lorsque $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers $+\infty$. Nous appellerons formes indéterminées des expressions dont les limites ne sont pas immédiatement obtenues par les théorèmes généraux concernant les opérations sur les limites.

Quand une limite se présente sous forme indéterminée, un développement limité permet le plus souvent de trouver la réponse.

1. Forme $\frac{0}{0}$:

C'est la forme indéterminée la plus courante à laquelle peuvent se ramener la plupart des autres formes.

Une fonction $F(x)$ se présente sous la forme $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ tendent toutes les deux vers 0 si lorsque x tend vers x_0 . Il est commode de se ramener au cas $x_0 = 0$.

Pour étudier le comportement de F on peut remplacer f et g par des infiniments petits équivalents f_1 et g_1 .

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

En particulier si f et g sont des infiniments petits d'ordres n et m par rapport à x dont les parties principales sont ax^n et bx^m , la fonction $F(x)$ se comporte comme le quotient $\frac{ax^n}{bx^m}$:

- (a) Pour $n > m$: $F(x)$ tend vers 0 avec x .
- (b) Pour $n = m$: $F(x)$ tend vers $\frac{a}{b}$ lorsque x tend vers 0.
- (c) Pour $n < m$: $F(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers 0.

ä Exemple 3.31 Soit à chercher la limite lorsque x tend vers 0 de la fonction :

$$y = \frac{\sinh x - \sin x}{\tan x - x}$$

On est en présence de la forme $\frac{0}{0}$.

On a :

$$\sinh x - \sin x = \left(x + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \right) = \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$\tan x - x = \left(x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \right) - x = \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

Par suite y a la même limite que le quotient $\frac{x^3/3}{x^3/3} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{\tan x - x} = 1$

ä **Exemple 3.32** Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{\cosh bx - 1}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

$$\cos ax = 1 - \frac{1}{2}a^2x^2 + O(x^4) \implies 1 - \cos ax = \frac{1}{2}a^2x^2 + O(x^4)$$

$$\cosh bx = 1 + \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^4) \implies \cosh bx - 1 = \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^4)$$

$$\frac{1 - \cos ax}{\cosh bx - 1} \sim \frac{a^2x^2/2}{b^2x^2/2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{\cosh bx - 1} = \frac{a^2}{b^2}$$

ä **Exemple 3.33** Cherchons la limite lorsque x tend vers 0 de la fonction :

$$f(x) = \frac{e^{3x} - e^{2x} - \sin x}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - x/2}$$

On a

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + O(x^3), \quad e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + O(x^3), \quad \sin x = x + O(x^3)$$

$$\begin{aligned} e^{3x} - e^{2x} - \sin x &= \left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + O(x^3) \right) - \left(1 + 2x + 2x^2 + O(x^3) \right) - \\ &\quad (x + O(x^3)) \\ &= \frac{5}{2}x^2 + O(x^3) \end{aligned}$$

$$\sqrt{1+3x} = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + O(x^3)$$

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - x &= \left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 \right) - \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 \right) - x/2 \\ &= -\frac{5}{8}x^2 + O(x^3) \end{aligned}$$

$$f(x) \sim \frac{5x^2/2}{-5x^2/8} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \sin x}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - x/2} = -4$$

2. **Forme** $\frac{\infty}{\infty}$:

C'est le cas où F se présente sous la forme $\frac{f(x)}{g(x)}$, les fonctions f et g augmentent indéfiniment en valeurs absolues lorsque x tend vers x_0 . En écrivant $F = \frac{1/g}{1/f}$, on voit que cette forme se ramène immédiatement à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Si f et g sont des infiniments grands d'ordres n et m par rapport à x dont les parties principales sont ax^n et bx^m , la fonction $F(x)$ se comporte comme le quotient $\frac{ax^n}{bx^m}$:

- (a) Pour $n > m$: $F(x)$ tend vers l'infini avec x .
- (b) Pour $n = m$: $F(x)$ tend vers $\frac{a}{b}$ lorsque x tend vers l'infini.
- (c) Pour $n < m$: $F(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

ä **Exemple 3.34** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}$

on a le DL₂(0) de $F(t) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ est : $F(t) = 1 - 2t + 3t^2 + O(t^3)$, (exemple 3.28)

Alors $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} = 1$

3. Forme $0 \times \infty$:

On appelle forme indéterminée $0 \times \infty$, pour $x = x_0$, une expression $f(x) \times g(x)$ où $f(x)$ tend vers 0 et $g(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers x_0 . Il en est ainsi la fonction $x \ln x$.

ä **Exemple 3.35** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}} \right)$

Il s'agit d'une forme indéterminée ($0 \times \infty$). En posant $t = \frac{1}{x}$; $t \rightarrow 0$ si $x \rightarrow +\infty$, on a

$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = \frac{t}{1+t}$ et la limite demandée est $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left(e^t - e^{\frac{t}{1+t}} \right)$.

Calculons le développement limité à l'ordre 2 au point 0 du terme $\left(e^t - e^{\frac{t}{1+t}} \right)$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + O(t^3)$$

$$\frac{t}{1+t} = t(1 - t + t^2 + O(t^3)) = t - t^2 + O(t^3)$$

$$e^{\frac{t}{1+t}} = 1 + (t - t^2)^2 + \frac{1}{2}(t - t^2)^2 + O(t^3) = 1 + t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$$

$$e^t - e^{\frac{t}{1+t}} = t^2 + O(t^3) \text{ par suite } \frac{1}{t^2} \left(e^t - e^{\frac{t}{1+t}} \right) = 1 + O(1)$$

Puisque $O(1)$ est une fonction qui tend vers 0 quand t tend vers 0, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left(e^t - e^{\frac{t}{1+t}} \right) = 1$$

4. Forme 1^∞ :

C'est une expression de la forme $y = f(x)^{g(x)}$ où $f(x)$ tend vers 1 et $g(x)$ tend vers l'infini si x tend vers a .

On introduit la fonction $z = \ln y = g(x) \ln f(x)$, telle que $\ln f$ tend vers 0 si x tend vers a , on se ramène donc à la forme indéterminée $0 \times \infty$.

ä **Exemple 3.36** Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} y(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} y(x)$ où $y(x) = \left(\frac{1+x}{3-x} \right)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

Si $x \in]-1, 3[$, $\frac{1+x}{3-x}$ est positif, donc l'expression dont on veut la limite est bien définie au voisinage de 1. C'est une forme indéterminée 1^∞ .

$$\text{Soit } z = \ln y = \frac{1}{(x-1)^2} \ln \left(\frac{1+x}{3-x} \right)$$

Posons $t = x - 1$: t tend vers 0 quand x tend vers 1

$$D'où : z = \frac{1}{(x-1)^2} \ln \left(\frac{1+x}{3-x} \right) = \frac{1}{t^2} \ln \frac{2+t}{2-t} = \frac{1}{t^2} \ln \left(\frac{1+t/2}{1-t/2} \right)$$

On doit calculer la limite de cette dernière expression quand t tend vers 0.

On a les développements limités à l'ordre 2 au point 0 :

$$\ln \left(1 + \frac{t}{2} \right) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$$

$$\ln \left(1 - \frac{t}{2} \right) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$$

$$\ln \left(\frac{1+t/2}{1-t/2} \right) = \ln \left(1 + \frac{t}{2} \right) - \ln \left(1 - \frac{t}{2} \right) = t + O(t^2)$$

$$\frac{1}{t^2} \ln \left(\frac{1+t/2}{1-t/2} \right) = \frac{1}{t^2} (t + O(t^2)) = \frac{1}{t} \left(1 + \frac{O(t)}{t} \right)$$

Quand t tend vers $\frac{O(t)}{t}$ tend par définition vers 0, donc $\left(1 + \frac{O(t)}{t} \right)$ tend vers 1

Par suite :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \ln \left(\frac{1+t/2}{1-t/2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t^2} \ln \left(\frac{1+t/2}{1-t/2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$$

En prenant l'exponentielle, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

5. Forme 0^0 :

C'est le cas où $y = f(x)^{g(x)}$ et $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0 si x tend vers a .

Comme dans les cas précédent, on pose $z = \ln y = g(x) \ln f(x)$ et on ramène à la forme $(0 \times \infty)$

Si $\lim_{x \rightarrow a} z = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} y = e^\ell$

6. Forme $\infty - \infty$:

C'est une expression de la forme $f(x) = g(x) - h(x)$ où $g(x)$ et $h(x)$ tendent vers l'infini si x tend vers a .

L'utilisation de DL permet de trouver la limite de $f(x)$.

ä **Exemple 3.37** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$

On pose $t = \frac{1}{x}$

t tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x = \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t} + 2} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \sqrt{1 + 3t + 2t^2} - \frac{1}{t}$$

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + O(u^3)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+3t+2t^2} &= 1 + \frac{1}{2}(3t+2t^2) - \frac{1}{8}(3t+2t^2)^2 + O(t^3) = 1 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3) \\ \frac{1}{t}\sqrt{1+3t+2t^2} - \frac{1}{t} &= \frac{1}{t}\left(1 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3) - 1\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}t + O(t^2) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x+2} - x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{8}t + O(t^2)\right) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

c) Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Si une fonction f possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a , celui-ci détermine l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

Si on peut pousser ce D.L. à un ordre supérieur, le premier terme non nul qui suit permet de préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage du point d'abscisse a .

Considérons une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un point a , un tel développement limité est de la forme

$$f(x) = \alpha + \beta(x-a) + \gamma(x-a)^2 + O((x-a)^3) \quad (3.52)$$

avec $\alpha = f(a)$ et $\beta = f'(a)$

L'équation de la tangente au point a est

$$y = \alpha + \beta(x-a) \quad (3.53)$$

Or le signe de la quantité $f(x) - [\alpha + \beta(x-a)]$ permet d'étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.

1. Si $\gamma \neq 0$, on a : $\gamma(x-a)^2 + O((x-a)^3) \underset{a}{\sim} \gamma(x-a)^2$ donc

$$f(x) - [\alpha + \beta(x-a)] \underset{a}{\sim} \gamma(x-a)^2$$

- Si $\gamma > 0$ alors au voisinage de a la quantité $f(x) - [\alpha + \beta(x-a)]$ est positive et la courbe est au dessus de sa tangente en a
- Si $\gamma < 0$ alors au voisinage de a la quantité $f(x) - [\alpha + \beta(x-a)]$ est négative et la courbe est au dessous de sa tangente en a

2. Si $\gamma = 0$ on ne peut plus passer aux équivalents. On essaie alors d'obtenir un développement limité d'ordre supérieur.

Supposons qu'il existe un développement limité d'ordre 3 de la forme :

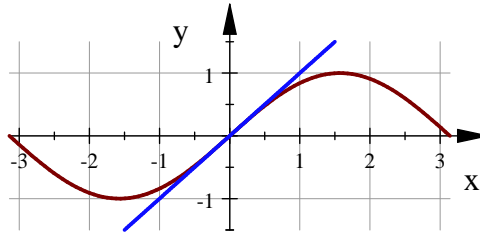
$$f(x) = \alpha + \beta(x-a) + \delta(x-a)^3 + O((x-a)^4) \quad (3.54)$$

On supposera $\delta \neq 0$. Par un raisonnement identique au précédent, on a

$$f(x) - [\alpha + \beta(x-a)] \underset{a}{\sim} \delta(x-a)^3$$

Mais ici quel que soit le signe de δ comme $(x-a)^3$ change de signe suivant que x est supérieur ou inférieur à a la quantité $\delta(x-a)^3$ change également de signe. La courbe est soit au-dessus de la tangente avant a puis au-dessous, soit au-dessous puis au-dessus : on a en a un point d'inflexion.

ä **Exemple 3.38** $f(x) = \sin x$



Au voisinage de $x = 0$, on a : $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$, l'équation de la tangente au point $x = 0$ est : $y = x$

$(\sin x - x)$ a le même signe que $-\frac{x^3}{6}$

$x = 0$ est un point d'inflexion, la courbe représentant $\sin x$, est située au dessus de la tangente, si $x < 0$ et en dessous de la tangente si $x > 0$.

d) Position par rapport à une asymptote

Si la fonction $f(x)$ admet un développement limité généralisé au voisinage de l'infini de la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (3.55)$$

alors la droite Δ d'équation : $y = ax + b$ est l'asymptote à la courbe C_f de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$)

De plus :

1. Si $c > 0$, alors Δ se trouve au dessous de C_f .
2. Si $c < 0$, alors Δ se trouve au dessus de C_f .
3. Si $c = 0$ on ne peut pas conclure directement et il faudra donc faire un DL généralisé à l'ordre 2.

En générale, si le DL généralisé au voisinage de l'infini est de la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + O\left(\frac{1}{x^k}\right) \quad (3.56)$$

$f(x) - (ax + b)$ est du signe de $\frac{c}{x^k}$, ce qui donne la position de C_f par rapport à Δ

ä **Exemple 3.39** Soit $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$

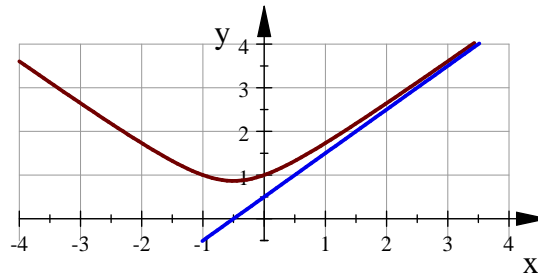
pour $x > 0$, on a $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$, en posant $t = \frac{1}{x}$ on obtient :

$$\sqrt{1 + t + t^2} = 1 + \frac{1}{2}(t + t^2) - \frac{1}{8}(t + t^2)^2 + O(t^3) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + O(t^3)$$

$$\text{Ainsi : } f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$\Delta : y = x + \frac{1}{2}$ est l'équation de l'asymptote au voisinage de $+\infty$

On a $\frac{3}{8} > 0$, C_f est au dessus de Δ



3.6 Exercices

Exercice 3.1 Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en $x = 0$
2. Trouver $f'(x)$ si $x \neq 0$
3. Etudier la continuité de $f'(x)$ en $x = 0$

Exercice 3.2 En utilisant la définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- | | | |
|-------------------------|----------------------|---------------------|
| 1. $f(x) = x^3$ | 3. $f(x) = \sqrt{x}$ | 5. $f(x) = \sin 2x$ |
| 2. $f(x) = \frac{1}{x}$ | 4. $f(x) = 2x^2 - x$ | 6. $f(x) = \ln(x)$ |

Exercice 3.3 Trouver les angles formés par l'axe Ox et les tangentes aux courbes des fonctions suivantes aux points indiqués :

- | | |
|--|---|
| 1. $y = x^2$ $x_0 = 1$ $x_1 = -1$ | 3. $y = \sqrt{x}$ $x_0 = 1$ $x_1 = 2$ |
| 2. $y = \frac{1}{x}$ $x_0 = 1$ $x_1 = 0$ | 4. $y = \sin x$ $x_0 = \pi/2$ $x_1 = 0$ |

Exercice 3.4 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\frac{x^5 + 2x}{x - 1}$ | 5. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ | 9. $\sin 3x \cos 5x^2$ |
| 2. $\frac{\sin x}{x}$ | 6. $\tan(\ln(x))$ | 10. $\frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x$ |
| 3. $\sqrt{x + \sqrt{x}}$ | 7. $\ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ | 11. $\ln(\cos x)$ |
| 4. $\sin \sqrt[3]{x^2}$ | 8. $\cos\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ | 12. $\tan(e^x + \sin x)$ |

Exercice 3.5 Soient $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions de la variable x .

1. Si $y = u^v$. Calculer $\ln y$, $(\ln y)'$ et démontrer que :

$$y' = vu'u^{v-1} + u^v v' \ln u$$

2. Si $y = e^u$. Démontrer que : $y' = u'e^u$

Exercice 3.6 Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1. $e^{\sin x}$

4. $x^{\ln x}$

7. $10^{x \tan x}$

2. x^x

5. $(\sin x)^{\sin x}$

8. $\sin(\sqrt{1-2^x})$

3. $\exp(x^x)$

6. $\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{x}{n}}$

9. $a^{x \log x}$

Exercice 3.7 Démontrer les formules des dérivées des fonctions trigonométriques inverses :

1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

2. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 3.8 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $\arcsin \frac{x}{a}$

3. $\arctan \frac{x^2}{x^2+1}$

5. $\arctan \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

2. $\arcsin \frac{x}{x+1}$

4. $\arccos e^x$

6. $\frac{\arccos x}{x}$

Exercice 3.9 Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

1. $y = \sin^2 x$

2. $y = \arctan \frac{x}{a}$

3. $y = \ln \frac{x+1}{x}$

4. $y = \sqrt[7]{x^4}$

Exercice 3.10 Déterminer les équations de la tangente et de la normale au point $M_0(x_0, f(x_0))$ sur les courbes suivantes, puis déduire les longueurs de la tangente, de la sous-tangente, de la normale et celle de la sous-normale.

1. $y = x^3 - 3x^2 - x + 5; x_0 = 3$

3. $y = x \sin x; x_0 = \frac{\pi}{2}$

2. $y = 2px^2; x_0 = 2$

4. $y = \frac{1}{x}; x_0 = 1$

Exercice 3.11 Utiliser le théorème de L'Hospital pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ax}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x$

6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x}$

Exercice 3.12 Vérifier le théorème de Rolle pour les fonctions suivantes :

1. $y = x^2 - 3x + 2$ sur le segment $[1, 2]$

2. $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ sur le segment $[0, 1]$

3. $y = \sin^2 x$ sur le segment $[0, \pi]$

Exercice 3.13 On demande de fabriquer un cylindre de rayon de base r et de hauteur h dont le volume est de 1 (litre). On utilise une plaque de cuivre. Calculer les valeurs de r et h d'une façon que la quantité de matériau utilisé soit au minimum, en négligeant l'épaisseur de plaque.

Exercice 3.14 Calculer l'aire maximale d'un rectangle inscrit dans le demi cercle supérieur ($y > 0$) d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

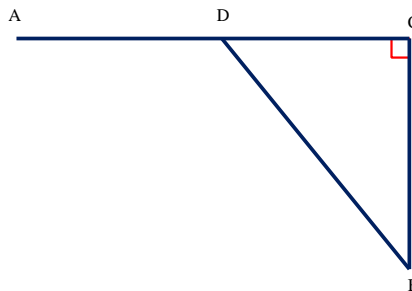
Exercice 3.15 Un fil de longueur L est à utiliser pour faire un carré de côté x et un triangle équilatéral de côté y . Comment le fil doit être divisé pour que la somme des 2 aires du carré et du triangle soit minimale ? soit maximale ?

On rappelle qu'un triangle équilatéral a 3 côtés égaux et que l'aire d'un triangle est égale la moitié du produit de sa base et sa hauteur.

Exercice 3.16 Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ. On connaît les distances $AC = \ell$ et $CB = d$.

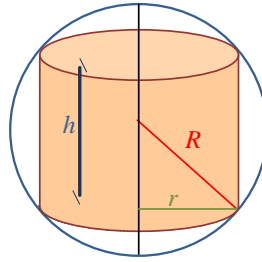
On sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route.

Il quitte la route en un point D de $[AC]$ à préciser. Les trajets successifs de A à D et de D à B sont supposés rectilignes.



Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant ℓ et d .

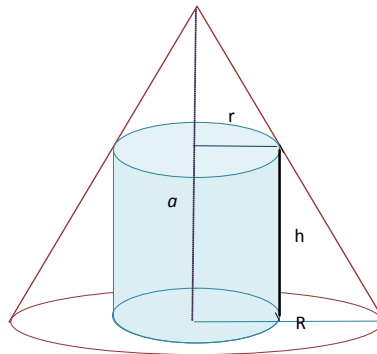
Exercice 3.17 Un cylindre de rayon r et de hauteur h , est inscrit dans une sphère de rayon R . Le milieu de l'axe du cylindre se trouve au centre de la sphère.



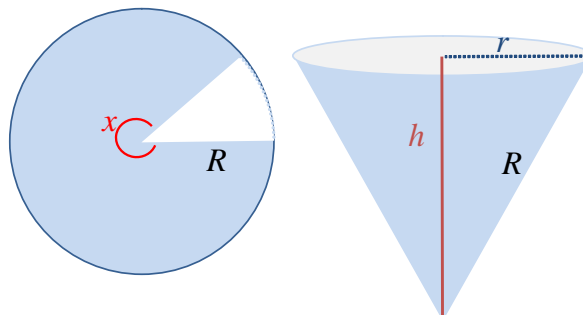
Trouver, en fonction de R , le rayon r et la hauteur h du cylindre de plus grand volume possible. Calculer r et h pour $R = \sqrt{3}$.

Exercice 3.18 Un cylindre de rayon r et de hauteur h , est inscrit dans un cône de révolution de rayon de base R et de hauteur a .

1. Trouver, en fonction de R et a , le rayon r et la hauteur h du cylindre de plus grand volume possible.
2. Calculer r et h pour $R = 60$ cm et $a = 100$ cm



Exercice 3.19 Dans un disque de papier de rayon R , on découpe un secteur angulaire d'angle x radians ($x \in [0, 2\pi]$), avec lequel on confectionne un cornet de frites conique. Déterminer x pour que le volume du cornet soit maximal.



Le rayon r de la section du cône est tel que : $2\pi r = Rx$ et le volume du cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Exercice 3.20 On considère la sphère Σ de centre O et de rayon $R = 1$. On voudrait mettre à l'intérieur de Σ la partie principale d'un cône, dont le sommet est le pôle nord de Σ . On suppose que le rayon de base du cône est r , sa hauteur est $h \in [1, 2]$ et sa directrice est de longueur ℓ . On rappelle que l'aire d'un tel cône est $S = \pi r \ell$ et le volume est $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. L'objectif de cet exercice est de mettre un cône de surface maximale dans la sphère

1. Montrer que $r^2 = 2hR - h^2$ où $R = 1$ est le rayon de la sphère.
2. Dédurre que $S^2 = 2\pi^2(2h^2 - h^3)$.
3. Quels doivent être h, r et ℓ si S est maximale ?
4. Les valeurs ainsi trouvées de h et r , correspondent-ils à un volume maximal du domaine intérieur au cône ? Justifier !
5. Trouver l'aire maximale du cône qu'on peut insérer dans la sphère.

Exercice 3.21 Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = x - x^3$ sur l'intervalle $[-2, 1]$ en précisant la valeur de c .

Exercice 3.22 On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x}; x \in [a, b]$, avec $0 < a < b < \infty$ montrer que, pour tout $h \in]0, b - a[$, il existe un unique θ vérifiant

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h) \quad (E)$$

(les valeurs de a et b étant fixés). On note θ_h cette valeur de θ . Calculer θ_h (en fonction de a et h déterminer $\lim_{h \rightarrow 0^+} \theta_h$)

Exercice 3.23 On veut étudier les sommes

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En utilisant la formule des accroissements finis pour la fonction $\ln x$, montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$\frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

2. Soit n un entier au moins égal à 2.

Écrire cet encadrement pour $x = 1, x = 2, \dots, x = n - 1$. En déduire que l'on a :

$$S_n - 1 < \ln n < S_{n-1}$$

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$$

Exercice 3.24 Calculer les développements limités suivants au point 0, à l'ordre n :

$$1. \frac{1}{1-x} - e^{-x}, n = 3$$

$$2. \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}, n = 3$$

$$3. \sin x \cos 2x, n = 3$$

$$4. \cos x \ln(1+x), n = 3$$

$$5. (1+x^3) \sqrt{1-x^2}, n = 3$$

$$6. \ln^2(1+x), n = 3$$

$$7. \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right), n = 4$$

$$8. e^{\sin x}, n = 4$$

$$9. (\cos x)^{\sin x}, n = 4$$

$$10. \frac{1}{1+x+x^2}, n = 4$$

$$11. \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}, n = 4$$

$$12. \frac{\ln(1+x)}{\sin x}, n = 2$$

Exercice 3.25 Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

de trois façons :

1. par la formule de Taylor-Young
2. par composition de développements limités
3. en commençant par calculer le développement limité de f' .

Exercice 3.26 Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 + \sin^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2x^2}$

Exercice 3.27 Calculer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de $\ln(1 - x \cos^2 x)$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x \cos^2 x)}{3x}$.

Exercice 3.28 Soit la fonction pour tout définie par

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$$

1. Déterminer le développement limité de $f(x)$, à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.
3. Déterminer une équation de l'asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Exercice 3.29 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$: où $D =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$, définie pour tout $x \in D$ par :

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

1. Donner le développement limité de f , à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.
En déduire que le graphe de $f(x)$ admet une tangente (T) au point d'abscisse $x = 0$.
Donner une équation cartésienne de (T) et préciser la position du graphe par rapport à (T).
2. En utilisant un développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$, démontrer que le graphe de f admet une asymptote (A).
Donner une équation cartésienne de (A) et préciser la position du graphe de f par rapport à (A).

Exercice 3.30 Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

1. Déterminer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
3. Déterminer alors l'équation de la tangente en 0 et étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 3.31 Soit la fonction

$$f(x) = \frac{e^x \sin x - \ln(1+x)}{x^2}.$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que le prolongement de f est dérivable en 0.

Exercice 3.32 Calculer les développements limités de $f(x)$ au point x_0 à l'ordre n , dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x}; n = 3, x_0 = 2$
2. $f(x) = x^3; n = 4; x_0 = -2$
3. $f(x) = x^4 + 1; n = 4; x_0 = 1$
4. $f(x) = \sin x; n = 3; x_0 = \frac{\pi}{3}$

5. $f(x) = \ln x, n = 4, x_0 = 1$
6. $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}, n = 2, x_0 = 1$

Exercice 3.33 Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3

2. $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ en $+\infty$ et $-\infty$ à l'ordre 1

3. $e^{2/x}$ en $+\infty$ à l'ordre 3

4. $e^{-1/x}$ en $-\infty$ à l'ordre 3

5. $\frac{x^2-x}{1+x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2

6. $\frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{2-x+x^2}}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2

Exercice 3.34 Déterminer le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 1 de la fonction définie par :

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$$

Exercice 3.35 Soit

$$f(x) = e^{\sin x}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de $f(x)$.

2. Donner un équivalent de $f(x) - e$ en $\frac{\pi}{2}$.

3. En déduire $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x} - e}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$

Exercice 3.36 Calculer un développement limité à l'ordre 2 en $x = 2$ de

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 - x^2 - x - 2$$

en déduire : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x^3 - x^2 - x - 2}$

Exercice 3.37 Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0, de $f(t) = \sqrt{1+3t+2t^2} - 1$

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x+2} - x)$

Exercice 3.38 :

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1+h)^{\frac{1}{h}}$

2. En déduire le développement généralisé à l'ordre 2 de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

3. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)$$

Exercice 3.39 On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}}$$

1. Ecrire le développement limité généralisé de $\cos\left(\frac{1}{2x}\right)$ en $+\infty$ à l'ordre 3
2. Ecrire le développement limité généralisé de $\sqrt{2 + \frac{1}{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3
3. En déduire le développement limité généralisé de $f(x)$ en $+\infty$ à l'ordre 3
4. Écrire l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$

Exercice 3.40 On considère la fonction

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$$

1. Ecrire le développement limité de $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3.
2. En déduire le développement asymptotique de f à l'ordre 2 en $\pm\infty$
3. Ecrire les équations des asymptotes pour f en $\pm\infty$

Exercice 3.41 :

1. Ecrire le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
2. En déduire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
3. Soit $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au graphe de f pour $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 3.42 Soit la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} - 1$$

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x)$
2. Déduire l'équation de la tangente de la fonction $h(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$ au point $x = 0$
3. Calculer la limite quand $x \rightarrow 0$ de la fonction : $g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

Exercice 3.43 Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x \tan 2x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x - \sin x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2 x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{x^2 + x^3}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh \frac{1}{x^2} \right)^{x^2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{x} \right)^x$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2} \right)^{\frac{x}{x-1}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x} \right)$$

Exercice 3.44 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 3x + 4x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrez que f admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre 2 et que, pourtant, $f''(0)$ n'existe pas.

Exercice 3.45 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \ln |x| & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Calculer la dérivée seconde $f''(0)$ si elle existe.
5. Peut-on utiliser la formule de Taylor-Young pour écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 ? Pourquoi ?
6. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 s'il existe.

Chapitre 4

Calcul intégral

Le calcul intégral joue un rôle fondamental en physique pour faire des calculs sur des grandeurs continues (aires, volumes, flux, moment d'inertie,...) dans de nombreux domaines : mécanique, électrostatique, thermodynamique... Le développement du calcul intégral a commencé avec le calcul des aires comme limites d'une somme infinie. Ces calculs ont invités l'étude de cas plus généralisé qu'on l'appelle intégrale

L'objectif de ce chapitre est discuter les méthodes de calcul de certains types des intégrales indéfinies fréquemment utilisées en physique, en mécanique et en électronique, ainsi quelques applications importantes des intégrales définies.

4.1 Notion de primitive, intégrale indéfinie

Connaissant une fonction $f(x)$ continue sur un intervalle I on sait bien comment chercher la dérivée de cette fonction en un point quelconque $x \in I$. Dans la suite nous allons de considérer le problème réciproque : connaissant la dérivée $f'(x)$ on va essayer de déterminer la fonction originale $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. (Figure 1).

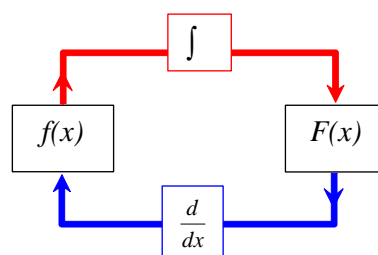


FIG. 4.1 – Dérivée et primitive

Définition 4.1 Une fonction $F(x)$, de la variable réelle x , est dite **primitive** de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $]a, b[$ si en tout point de cet intervalle $F'(x) = f(x)$ ou bien $dF = f(x) dx$.

Par exemple : la fonction $F(x) = x^2$ est une primitive de $f(x) = 2x$ sur \mathbb{R} .

Cependant, $F(x) = x^2$ n'est pas la primitive unique de $2x$, si on ajoute n'importe quelle constante C à x^2 , la fonction $G(x) = x^2 + C$ est aussi une primitive de $f(x) = 2x$.

La dérivée d'une constante arbitraire C est égale à zéro, donc elle peut être considérée comme primitive de 0 par suite $F(x) + C$ est une primitive de $f(x)$, en effet :

$$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$$

ä **Exemple 4.1** $x^3 + 2$, $x^3 - 5$, $x^3 + 405$, ... sont toutes de primitives de $3x^2$.
Soit donc $x^3 + C$ la primitive de $3x^2$.

Théorème 4.1 Deux primitives, $F(x)$ et $G(x)$, de la même fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ se diffèrent d'une constante.

Démonstration :

On a $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$
 $\implies F' - G' = (F - G)' = f - f = 0$
 $\implies F - G = \text{const.}$

4.1.1 Intégrale indéfinie

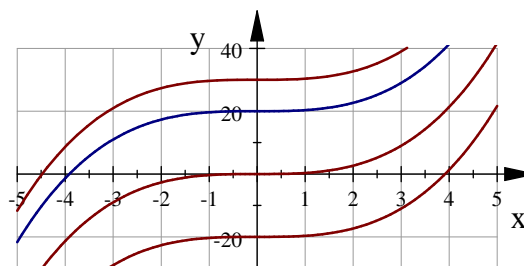
Définition 4.2 On appelle intégrale indéfinie de la fonction $f(x)$ toute fonction de la forme $F(x) + C$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et on note :

$$\int f(x) dx = \int dF = F(x) + C \quad (4.1)$$

Le symbole \int est le signe somme ou signe intégrale elle représente la limite de la somme infinie des quantités infiniment petites dF .

La formule (1) démontre que l'intégrale définit une famille des courbes translattées l'une de l'autre le long de l'axe Oy .

ä **Exemple 4.2** La figure ci-dessous démontre les courbes de quelques primitives de $f(x) = x^2$.



Courbes de $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3} - 20$, $\frac{x^3}{3} + 20$, $\frac{x^3}{3} + 30$

○ Il est clair que chaque fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ possède une primitive sur cet intervalle.

4.1.2 Primitives usuelles

Les primitives sont, par définition, des "anti-dérivées", alors à partir des dérivées on peut déduire immédiatement les primitives de certaines fonctions usuelles.

Par exemple :

ä **Exemple 4.3** La dérivée de la fonction $F(x) = x^{n+1}$ est $f(x) = (n+1)x^n$ ou bien :

$$\frac{dx^{n+1}}{dx} = (n+1)x^n \iff \frac{1}{n+1} \frac{dx^{n+1}}{dx} = x^n$$

$$\implies \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) = x^n$$

donc on peut déduire la primitive de x^n : $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

ä **Exemple 4.4** $\frac{d}{dx} \left(-\frac{\cos ax}{a} + C \right) = \sin ax \implies \int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C.$

Les primitives de certaines fonctions usuelles :

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$
3. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$
4. $\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax| \left(x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2} \right)$
5. $\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| \left(x \neq k\pi \right)$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
8. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$
9. $\int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} + C \left(b > 0, b \neq 1 \right)$
10. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x}{a} + C$
13. $\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax$
14. $\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax$

Théorème 4.2 (Propriétés) Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues et possèdent des primitives sur le segment $[a, b]$, soient α et β deux constantes on a :

1. $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$
2. Si $\int f(x) dx = F(x) + C \implies \int f(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x) + C$
3. Si $\int f(x) dx = F(x) + C \implies \int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$

Démonstration :

1. On a $\frac{d}{dx} (\int f(x) dx) = f(x)$ et $\frac{d}{dx} (\int g(x) dx) = g(x)$ par suite

$$\frac{d}{dx} (\alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx) = \alpha \frac{d}{dx} (\int f(x) dx) + \beta \frac{d}{dx} (\int g(x) dx)$$

$$= \alpha f(x) + \beta g(x)$$
2. $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha} F(\alpha x) + C \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} F(\alpha x) + \frac{dC}{dx} = F(\alpha x)$
3. $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} F(\alpha x + \beta) + \frac{dC}{dx} = F(\alpha x + \beta)$

à Exemple 4.5 :

1. $\int (3x + a \sin x - 2^x) dx = \frac{3}{2}x^2 - a \cos x - \frac{2^x}{\ln 2} + C$
2. $\int (\sin 5x - 9 \cos 7x + 3e^{10x}) dx = -\frac{1}{5} \cos 5x - \frac{9}{7} \sin 7x + \frac{3}{10} e^{10x} + C$
3. $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln(ax + b) + C$
4. $\int \cos(3x - 5) dx = \frac{1}{3} \sin(3x - 5) + C$

4.2 Méthodes générales de calcul

Dans la suite nous allons de discuter deux méthodes générales de calcul des intégrales indéfinies, ces méthodes sont basées à la connaissance des primitives des fonctions usuelles et par suite elles servent de transformer la fonction à intégrer en une forme usuelle dont nous connaissons la primitive.

4.2.1 Changement de variable

Le principe général de cette méthode est de transformer l'intégrale $\int f(x) dx$ en une forme $\int g(t) dt$ où $g(t)$ est une fonction usuelle de t . Il faut donc faire un changement de variable : $x \rightarrow t$ tel que $x = u(t)$ d'une façon d'avoir la fonction $g(t)$.

Notons que le choix de la fonction $u(t)$ n'est pas toujours évident, mais il faut à coté considérer l'existence de la quantité $dx = \frac{du}{dt} dt$.

Considérons la fonction composée $f(x(t))$ avec $x = u(t)$, $f(x)$ est une fonction continue de x et $x = u(t)$ une fonction continue et dérivable par rapport à t . $dx = u'(t) dt$ et $f(x)$ a une primitive par rapport à x , alors :

$$\int f(x) dx = \int f(u(t)) u'(t) dt \quad (4.2)$$

La forme $\int f(u(t)) u'(t) dt$ est alors une intégrale par rapport à la variable t .

Si la fonction est initialement donnée sous la forme $\int f(u(t)) u'(t) dt$, donc en posant $x = u(t)$ et $dx = du = u' dt$ on obtient l'intégrale $\int f(x) dx$.

Remarque 4.1

Il est parfois commode de choisir le changement de variable sous la forme $t = v(x)$ donc $dt = v' dx$.

On peut aussi effectuer le changement de variable deux ou plusieurs fois

ä **Exemple 4.6** Soit à calculer $I = \int \sqrt{\sin x} \cos x dx$

Si on pose : $t = \sin x$ on aura : $dt = \cos x dx$

par suite

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{t^3} = \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3 x} + C \end{aligned}$$

ä **Exemple 4.7** $J = \int \frac{xdx}{1+x^2}$

Posons $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2} dt$

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2} \ln(t) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

ä **Exemple 4.8** $K = \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

On pose $\ln x = t \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned} K &= \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int t^3 dt \\ &= \frac{t^4}{4} = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C \end{aligned}$$

4.2.2 Intégration par parties

L'intégration par parties est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales, dans un but de simplification du calcul.

Soient $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions dérivables de la variable x .

La différentielle de la fonction produit uv est :

$$d(uv) = u dv + v du = uv' dx + vu' dx \quad (4.3)$$

en intégrant $d(uv)$, on trouve :

$$uv = \int d(uv) = \int uv' dx + \int vu' dx$$

ou bien :

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (4.4)$$

Cette dernière formule, appelée formule d'intégration par parties, elle permette de passer de la forme $\int u dv$ vers la forme : $uv - \int v du$ où $\int v du$ est une intégrale plus simple que $\int u dv$.

Cette formule est souvent utilisée pour calculer les intégrales du produit d'un polynôme par une fonction usuelle ($\sin x, \cos x, e^x, \ln x, \dots$)

Remarque 4.2

- On détermine généralement la fonction v à partir de la différentielle dv avec une constante égale à zéro.
- Pour la plupart des intégrales, nous pouvons être obligés d'intégrer plusieurs fois par parties.
- Parfois on effectue tout d'abord un changement de variable puis on passe à l'intégration par parties.

ä Exemple 4.9 $I = \int x e^x dx$

Par parties on pose

$$\begin{cases} u = x & \implies du = dx \\ dv = e^x dx & \implies v = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C = (x - 1) e^x + C \end{aligned}$$

ä Exemple 4.10 $J = \int x^2 \sin x dx$

on pose

$$\begin{cases} u = x^2 & \implies du = 2x dx \\ dv = \sin x dx & \implies v = -\cos x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x - 2 \int x (-\cos x) dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \end{aligned}$$

Intégrons deuxième fois par parties : $\int x \cos x dx$

$$\begin{cases} u_1 = x & \implies du_1 = dx \\ dv_1 = \cos x dx & \implies v_1 = \sin x \end{cases}$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$$

$$\begin{aligned} \implies \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) \\ &= (-x^2 + 2) \cos x + 2x \sin x + C \end{aligned}$$

ä **Exemple 4.11** $L = \int e^{ax} \sin bxdx$

Intégrons par parties, soit :

$$\begin{cases} u = e^{ax} & \implies du = ae^{ax} dx \\ dv = \sin bx & \implies v = -\frac{\cos bx}{b} \end{cases}$$

Alors :

$$L = \int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{\cos bx}{b} e^{ax} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx$$

Une deuxième fois par parties, avec :

$$\begin{cases} u = e^{ax} & \implies du = ae^{ax} dx \\ dv_1 = \cos bxdx & \implies v_1 = \frac{\sin bx}{b} \end{cases}$$

nous donne :

$$L = -\frac{\cos bx}{b} e^{ax} + \frac{a}{b} \left(\frac{\sin bx}{b} e^{ax} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx \right)$$

or $L = \int e^{ax} \sin bxdx$, donc on écrit :

$$L = -\frac{\cos bx}{b} e^{ax} + \frac{a \sin bx}{b^2} e^{ax} - \frac{a^2}{b^2} L \text{ et finalement :}$$

$$L = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$$

Attention

Le choix de u et v a une importance critique, le mal choix des ces quantités entraîne une difficulté de calcul.

Par exemple : $I = \int x \cos x dx$

Si on pose

$$\begin{cases} u = \cos x & \implies du = -\sin x dx \\ x dx = dv & \implies v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$$

on aura donc :

$$I = \frac{1}{2} x^2 \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx$$

Remarquez que la dernière intégrale est une que nous ne connaissons pas calculer mieux que l'original.

En fait, nous avons compliqué la situation en ce que la puissance de x dans la nouvelle intégrale est plus élevé que celle dans l'intégrale initiale.

4.2.3 Intégrations de quelques types de fonctions rationnelles

Dans ce paragraphe on donne les méthodes générales d'intégration de quelques fonctions particulières :

a) Intégration de fractions rationnelles $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Définition 4.3 Une fonction rationnelle est de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P_p et Q_q sont deux polynômes de degrés p et q respectivement.

On dit que la fraction est régulière si $p < q$. Sinon on dit que la fraction est irrégulière, et par division euclidienne on transforme la fraction sous la forme :

$$f(x) = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

où $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ est une fraction régulière et $R(x)$ est un polynôme de degré $(p - q)$, résulte de la division des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$.

Pour calculer $\int f(x) dx$ on décompose $f(x)$ en fractions simples.

Tout d'abord on cherchera les racines réelles a_1, a_2, \dots, a_m de $Q(x)$ d'ordres de multiplicité k_1, k_2, \dots, k_m respectivement ; ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = q$)

donc $Q(x)$ s'écrit sous la forme :

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m} \quad (4.5)$$

et on fait décomposer $f(x)$ en éléments simples de fractions, elle s'écrit :

$$f(x) = R(x) + \frac{A_{11}}{x - a_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{A_{21}}{(x - a_2)} + \dots + \frac{A_m}{(x - a_m)} + \dots$$

Les coefficients A_{ij} se déterminent par identification.

On a donc :

$$\int f(x) dx = \int R(x) dx + \int \frac{A_{11} dx}{x - a_1} + \dots + \int \frac{A_{1k_1} dx}{(x - a_1)^{k_1}} + \int \frac{A_{21} dx}{(x - a_2)} + \dots \quad (4.6)$$

avec :

$$\int \frac{A}{x - a} dx = \ln|x - a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x - a)^k} dx = \frac{A}{(1 - k)(x - a)^{k-1}} + C \quad (4.7)$$

Dans le cas où $Q(x)$ admet des racines complexes les fractions simples sont de la forme :

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + ax + b)^k}$$

ä **Exemple 4.12** $I = \int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} dx$

la fraction est régulière donc on passe directement vers la décomposition en fractions simples :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-2} \\ &= \frac{A(x+1)^2(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x-2) + D(x+1)^3}{(x+1)^3(x-2)} \end{aligned}$$

$$x^2 + 2 = D - 2B - 2C - 2A + 3xD + Ax^3 + Bx^2 + 3x^2D + x^3D - 3Ax - Bx + Cx$$

Par identification on trouve :

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ B + 3D = 1 \\ -3A + 3D - B + C = 0 \\ D - 2B - 2C - 2A = 2 \end{cases} \implies A = -\frac{2}{9}, B = \frac{1}{3}, C = -1, D = \frac{2}{9}$$

La fraction s'écrit donc :

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{2}{9(x+1)} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{2}{9(x-2)}$$

$$\implies I = -\frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\frac{2}{9} \ln|x+1| - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{2}{9} \ln|x-2| + C$$

$$= -\frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$$

ä **Exemple 4.13** $J = \int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$J = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)} - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)} - \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

ä **Exemple 4.14** $K = \int \frac{x^4}{(x-1)^2} dx$

$$\frac{x^4}{(x-1)^2} = x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 K &= \int (x^2 + 2x + 3) + 4 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 4 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C
 \end{aligned}$$

b) Intégrales de la forme $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$

La technique générale est de transformer l'intégrale sous la forme : $\int \frac{du}{u}$ et (ou) de mettre $ax^2 + bx + c$ en forme d'une carrée parfait.

On pose $u = ax^2 + bx + c$ alors $u' = 2ax + b \Rightarrow x = \frac{u' - b}{2a}$,

On écrit $Ax + B$ sous la forme :

$$Ax + B = A \frac{u' - b}{2a} + B = \frac{A}{2a} (2ax + b) + B - \frac{Ab}{2a}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a} (2ax + b) + B - \frac{Ab}{2a}}{ax^2 + bx + c} dx$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{2a} I_1 + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) I_2$$

$$I_1 = \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln |ax^2 + bx + c| + k$$

Pour l'intégrale I_2 :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a (t^2 \pm m^2)$$

où on a posé : $t = x + \frac{b}{2a}$, donc $dx = dt$

et $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm m^2$ selon le signe de $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm m^2}$$

- Si $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} > 0 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{am} \arctan \frac{t}{m} + C$

- Si $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} < 0 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 - m^2} = \frac{1}{2am} \ln \left| \frac{m-t}{m+t} \right| + C$

Finalemment :

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) I_2$$

$$\begin{aligned} \text{ä Exemple 4.15 } \int \frac{x-1}{x^2-x-1} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{1}{2}}{x^2-x-1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x-1} \end{aligned}$$

$$\diamond I_1 = \int \frac{2x-1}{x^2-x-1} dx, \text{ On pose : } u = x^2 - x - 1 \implies du = (2x-1) dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| = \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 1|$$

$$\diamond I_2 = \int \frac{dx}{x^2-x-1}$$

$$\frac{1}{x^2-x-1} = \frac{1}{\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} - x}$$

$$I_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{x + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} - x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left(x - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left(x + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} \right) + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}} \right| + C$$

Finalement on trouve :

$$I = \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 1| - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}} \right| + C$$

c) Intégrales de la forme $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

La méthode du calcul est identique à celle de la forme précédente, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm m^2}} \end{aligned}$$

$$\text{avec } t = x + \frac{b}{2a}, \text{ et } \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm m^2$$

Dans le cas particulier $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ il est plus commode de transformer directement le trinôme $ax^2 + bx + c$ sous la forme $t^2 \pm m^2$

Remarque 4.3

On peut aussi utiliser un changement de variable pour transformer l'intégrale en fonction rationnelle

- Si $a < 0$, on pose $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$ où α est une racine du trinôme
- Si $a > 0$, on pose $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t$

ä **Exemple 4.16** $I = \int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}}$

Faisons mettre $-2x^2 + 3x + 2$ sous la forme $t^2 \pm m^2$:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 3x + 2 &= -2 \left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \right) = -2 \left(x^2 - 2\frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - 1 \right) \\ &= -2 \left(\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} \right) = 2 \left(\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

L'intégrale s'écrit :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x - 3}{5} + C$$

ä **Exemple 4.17** $I = \int \frac{(x+3)}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx = \int \frac{(x+1)+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} \\ &= \sqrt{x^2+2x+2} + 2 \ln \left(x+1 + \sqrt{x^2+2x+2} \right) + C \end{aligned}$$

d) Intégrales de la forme $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx$

Effectuons les transformations :

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx = A \int \frac{xdx}{(x^2+px+q)^k} + B \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p-p}{(x^2+px+q)^k} dx + B \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{(2x+p) dx}{(x^2+px+q)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{2} I + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) J_k \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + q + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

$$\text{Posons d'autre part : } y = x + \frac{p}{2} \text{ et } h^2 = q - \frac{p^2}{4}$$

$$\text{Dans l'intégrale } I = \int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k} \text{ on pose : } t = x^2 + px + q \Rightarrow dt = (2x + p) dx$$

donc :

$$I = \int \frac{dt}{t^k} = \frac{t^{-k+1}}{1-k} = \frac{(x^2 + px + q)^{1-k}}{1-k} = \frac{(y^2 + h^2)^{1-k}}{1-k}$$

$$\text{Calculons l'intégrale } J_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} :$$

En introduisant y et h , J_k s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} J_k &= \int \frac{dy}{(y^2 + h^2)^k} = \frac{1}{h^2} \int \frac{y^2 + h^2 - y^2}{(y^2 + h^2)^k} dy \\ &= \frac{1}{h^2} \int \frac{dy}{(y^2 + h^2)^{k-1}} - \int \frac{y^2 dy}{(y^2 + h^2)^k} = \frac{1}{h^2} (J_{k-1} - J) \end{aligned}$$

$$\text{avec } J = \int \frac{y^2 dy}{(y^2 + h^2)^k}$$

on intègre par parties :

$$\begin{cases} u = y \Rightarrow du = dy \\ dv = \frac{y dy}{(y^2 + h^2)^k} \Rightarrow v = \frac{(y^2 + h^2)^{-k+1}}{2(-k+1)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } J &= uv - \int v du = \frac{y (y^2 + h^2)^{-k+1}}{2(-k+1)} - \int \frac{(y^2 + h^2)^{-k+1}}{2(-k+1)} dy \\ &= \frac{y}{2(-k+1)(y^2 + h^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(-k+1)} \int \frac{dy}{(y^2 + h^2)^{k-1}} \\ &= \frac{y}{2(-k+1)(y^2 + h^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(-k+1)} J_{k-1} \end{aligned}$$

Par suite :

$$J_k = \frac{1}{h^2} (J_{k-1} - J) = \frac{1}{h^2} \left(J_{k-1} - \frac{y}{2(-k+1)(y^2 + h^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(-k+1)} J_{k-1} \right)$$

et on obtient la relation de récurrence

$$J_k = \frac{1}{2h^2(k-1)} \left(\frac{y}{(y^2 + h^2)^{k-1}} + (2k-3) J_{k-1} \right) \quad (4.8)$$

En appliquant successivement ce procédé on arrive à la forme :

$$J_1 = \int \frac{dy}{y^2 + h^2} = \frac{1}{h} \arctan\left(\frac{y}{h}\right) + C$$

Finalement, l'intégrale I_k devient :

$$I_k = \frac{A}{2}I + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)J_k$$

$$= \frac{A}{2(1-k)(y^2+h^2)^{k-1}} + \frac{(2B-Ap)}{4h^2(k-1)} \left(\frac{y}{(y^2+h^2)^{k-1}} + (2k-3)J_{k-1} \right)$$

ä **Exemple 4.18** $I = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+5)^2} dx$

$$I = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+5)^2} dx = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+1+4)^2} dx = \int \frac{x-1}{((x+1)^2+4)^2} dx$$

Posons $y = x+1 \Rightarrow x = y-1$ et $dx = dy$

$$I = \int \frac{y-2}{(y^2+4)^2} dy = \int \frac{y}{(y^2+4)^2} dy - 2 \int \frac{1}{(y^2+4)^2} dy = J - 2K$$

$$J = \int \frac{y dy}{(y^2+4)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2+4)}{(y^2+4)^2} = -\frac{1}{2(y^2+4)}$$

$$I = -\frac{1}{2(y^2+4)} - 2K$$

$$K = \int \frac{1}{(y^2+4)^2} dy = \frac{1}{4} \int \frac{4}{(y^2+4)^2} dy = \frac{1}{4} \int \frac{4+y^2-y^2}{(y^2+4)^2} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y^2+4} - \frac{1}{4} \int \frac{y^2 dy}{(y^2+4)^2}$$

$$\int \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}y$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{8} \arctan \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \int \frac{y^2 dy}{(y^2+4)^2}$$

$$I = -\frac{1}{2(y^2+4)} - \frac{1}{4} \arctan \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{y^2 dy}{(y^2+4)^2}$$

$$\text{soit } L = \int \frac{y^2 dy}{(y^2+4)^2} = \int \frac{y y dy}{(y^2+4)^2}$$

Intégrons par parties :

$$\text{posons } u = y \Rightarrow du = dy \text{ et } dv = \frac{y dy}{(y^2+4)^2} = \frac{1}{2} \frac{d(y^2+4)}{(y^2+4)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{2(y^2+4)}$$

$$L = -\frac{y}{2(y^2+4)} + \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2+4} = -\frac{y}{2(y^2+4)} + \frac{1}{4} \arctan \frac{y}{2}$$

$$I = -\frac{1}{2(y^2+4)} - \frac{1}{4} \arctan \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{y}{2(y^2+4)} + \frac{1}{4} \arctan \frac{y}{2} \right) + C$$

$$= -\frac{y+2}{4(y^2+4)} - \frac{1}{8} \arctan \frac{y}{2} + C$$

$$= -\frac{x+3}{4(x^2+2x+5)} - \frac{1}{8} \arctan \frac{x+1}{2} + C$$

e) Intégration des fonctions irrationnelles

La méthode générale est de ramener la fonction à intégrer en une fonction rationnelle :

La forme $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots\right) dx$

R est une fonction rationnelle de $x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots$

On pose $x = t^k \Rightarrow dx = kt^{k-1}dt$ où k est le dénominateur commun des fractions $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \dots$

Chaque puissance en fraction de x devient une puissance entière de t , par suite on obtient une fonction rationnelle ordinaire en t .

Exemple 4.19 $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx$

Les fractions puissances sont : $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, leur dénominateur commun est 4

on pose : $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3 dt$, $\sqrt{x} = t^2$ et $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{t^{12}} = t^3$

$$I = \int \frac{t^2}{t^3+1} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3+1} dt = 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1} \right) dt$$

$$= \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} \ln |t^3+1| = \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{x^3} - \ln |\sqrt[4]{x^3}+1| \right) + C$$

La forme $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots\right] dx$

On fait le changement de variable $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ où k est le dénominateur commun des fractions $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \dots$, on ramène alors l'intégrale à la forme d'une fraction rationnelle

Exemple 4.20 $I = \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$

On pose $x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1$ et $dx = 2t dt$

$$\Rightarrow I = 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = 2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \int \left(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = 2\sqrt{x+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$$

f) Intégration par substitutions trigonométriques

Soit l'intégrale $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ où R est fonction rationnelle de x et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Pour rendre l'intégrale en une forme rationnelle, on écrit $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sous l'une des formes :

$$\sqrt{x^2 + h^2}, \quad \sqrt{x^2 - h^2}, \quad \sqrt{h^2 - x^2}$$

selon les signes de a et b .

Pour éliminer les racines, il est mieux de transformer l'argument sous signe racine en forme carrée parfait, dans le cas d'une somme des carrés, les fonctions trigonométriques, ou hyperboliques sont bien appropriées.

Selon le cas on peut faire le changement convenable de variable :

- si on a la forme $\sqrt{h^2 - x^2}$ on pose $x = h \cos t$ ou $x = h \sin t$
- si on a la forme $\sqrt{x^2 + h^2}$ on pose $x = h \tan t$ ou $x = h \sinh t$
- si on a la forme $\sqrt{x^2 - h^2}$ on pose $x = \frac{h}{\cos t}$ ou $x = \cosh t$

ä **Exemple 4.21** $I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$

On pose $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cos t dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt \\ &= \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\cot t - t + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C \end{aligned}$$

ä **Exemple 4.22** $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$

Posons $x = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt = \frac{dt}{\cos^2 t}$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\tan^2 t} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{\tan t}{1/\cos t} \right) \left(\frac{dt}{\cos^2 t} \right) = \int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} \\ &= -\int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos t} + C = \sqrt{1+x^2} + C \end{aligned}$$

4.2.4 Intégration des fonctions trigonométriques

a) Fonctions trigonométriques rationnelles

Dans le cas d'intégration de fonctions rationnelles de la forme

$$\frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}$$

où P et Q sont des polynômes, on utilise souvent le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ au but de se ramener en une fonction rationnelle ordinaire :

$$t = \tan \frac{x}{2} \iff x = 2 \arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$- \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$- \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$- \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2}$$

En remplaçant $\sin x$, $\cos x$, et dx , en fonction de t , dans la fonction initiale on obtient une fonction rationnelle de t .

ä **Exemple 4.23** $I = \int \frac{dx}{\sin x}$

$$\text{On pose } t = \tan \frac{x}{2} \implies dx = \frac{2dt}{1+t^2} \text{ et } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\implies I = \int \frac{2dt}{1+t^2} \times \frac{1+t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln |t| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

Remarque 4.4

Si les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ ne figurent qu'aux puissances paires on peut passer vers la variable $t = \tan x$:

$$- x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$- \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$- \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

ä **Exemple 4.24** $I = \int \frac{dx}{4 - \sin^2 x}$ On pose $t = \tan x$

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4 - \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4 + 3t^2}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + \frac{3}{4}t^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C$$

b) **Intégrales de la forme $\int \sin^m x \cos^n x dx$**

m et n sont des entiers relatifs et posons $I_{mn} = \int \sin^m x \cos^n x dx$

Trois cas à considérer :

1. **m ou n est impaire**

Soit $m = 2k + 1$

$$I_{mn} = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \sin x \cos^n x dx$$

$$= - \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x) = - \int (1 - t^2)^k t^n dt$$

On obtiendra une intégrale analogue si n est impaire.

ä **Exemple 4.25** $I = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$

$$= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = - \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x)$$

$$= - \int (1 - t^2) t^2 dt = - \int (t^2 - t^4) dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

Lorsqu'une puissance est négative, le même procédé transforme la fonction à intégrer en fonction rationnelle en t .

ä **Exemple 4.26** $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$

$$= \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x} \cos x dx$$

$$= \int \frac{1 - t^2}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$$

2. m et n sont paires et positifs

Soit $m = 2p$ et $n = 2q$

En utilisant les formules :

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \sin x \cos x &= \frac{\sin 2x}{2}\end{aligned}$$

on transforme l'intégrale sous la forme :

$$\frac{1}{2^{p+q}} \int (1 - \cos 2x)^p (1 + \cos 2x)^q dx$$

En appliquant successivement les transformations indiquées on arrive à des intégrales de la forme $\int \cos kx dx$.

ä **Exemple 4.27** $I = \int \sin^4 x dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right) + C$$

3. m et n sont paires et m ou n négatif

Dans ce cas on pose $t = \tan x$ et on transforme l'intégrale en celle de fonction rationnelle en t .

ä **Exemple 4.28** $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cos^4 x} dx = \int \frac{\tan^2 x}{(\cos^2 x)^2} dx = \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x)^2 dx$$

$$= \int t^2 (1 + t^2)^2 \frac{dt}{1 + t^2} = \int t^2 (1 + t^2) dt = \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + C$$

$$= \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

c) Intégrales de produits

Les intégrales des produits des fonctions trigonométriques de types :

$$\begin{aligned}&\int \sin mx \cos nxdx \\ &\int \sin mx \sin nxdx \\ &\int \cos mx \cos nxdx\end{aligned}$$

avec $m \neq n$ se transforment en des intégrales des sommes à l'aide des identités :

$$\begin{aligned}\sin mx \sin nx &= \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2} \\ \cos mx \cos nx &= \frac{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x}{2} \\ \sin mx \cos nx &= \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2}\end{aligned}$$

on a alors :

$$\begin{aligned}1. \int \sin mx \cos nxdx &= \frac{1}{2} \int (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{1}{2} \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \\ 2. \int \sin mx \sin nxdx &= \frac{1}{2} \int (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{1}{2} \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \\ 3. \int \cos mx \cos nxdx &= \frac{1}{2} \int (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\end{aligned}$$

ä **Exemple 4.29 :**

$$\begin{aligned}1. I = \int \cos 3x \sin 5xdx &= \frac{1}{2} \int [\sin(3+5)x + \sin(5-3)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 8x}{8} - \frac{\cos 2x}{2} \right] + C \\ &= -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + C \\ 2. \int \sin 3x \sin 5xdx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C \\ 3. \int \cos 3x \cos 5xdx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 8x) dx \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 8x + C\end{aligned}$$

4.3 Intégrales définies

On a noté que l'intégrale est une généralisation du calcul d'aire comme somme infinie. Pour fixer l'idée on va donner la définition de l'intégrale définie à partir de cette idée.

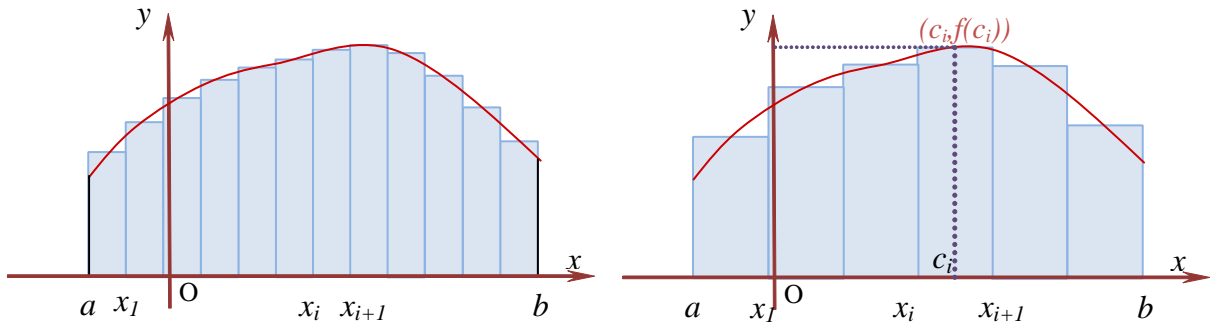


FIG. 4.2 – Décomposition du domaine

Considérons une fonction $y = f(x)$ définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et soit (C) la courbe représentative de $f(x)$.

Divisons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles élémentaires ; $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ (Figure 2), avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, et on décompose la zone limitée par la courbe (C) , l'axe ox et les droites $x = a$ et $x = b$ en n trapèzes curvilignes des aires élémentaires $S_i; i = 1, 2, \dots, n$.

alors l'aire de la zone indiquée est $S = \sum_{i=1}^n S_i$

Une valeur approximative de S se détermine en considérant les aires des rectangles élémentaires de largeurs $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ et de longueur $y_i = f(c_i); c_i \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$S'_i = y_i \Delta x_i = f(c_i) \Delta x_i$$

alors l'aire de la zone considérée est

$$S = \sum_{i=0}^n S'_i = \sum_{i=0}^n f(c_i) \Delta x_i \quad (4.9)$$

Plus la largeur Δx_i est faible, c'est-à-dire n grand, plus la valeur de S'_i est proche de la valeur de S_i .

Si $n \rightarrow \infty$ alors $\Delta x_i \rightarrow dx$ une quantité infiniment petite et la somme devient une somme infinie dont la limite, si elle existe, est une intégrale.

Etant donné que la fonction $f(x)$ est continue et donc bornée sur l'intervalle $[a, b]$, alors $\exists m$ et M tels que pour tout point $c_i \in [a, b]$ on a :

$$m \leq f(c_i) \leq M \implies m \Delta x_i \leq f(c_i) \Delta x_i \leq M \Delta x_i$$

$$\implies \sum_i m \Delta x_i \leq \sum_i f(c_i) \Delta x_i \leq \sum_i M \Delta x_i$$

$$\implies m \sum_i \Delta x_i \leq \sum_i f(c_i) \Delta x_i \leq M \sum_i \Delta x_i$$

$$\iff m(b-a) \leq \sum_i f(c_i) \Delta x_i \leq M(b-a)$$

Ce qui démontre que la somme $S_n = \sum_{i=0}^n f(c_i) \Delta x_i$ est bornée donc elle a une limite lorsque $n \rightarrow \infty$.

Définition 4.4 Une fonction f est dite intégrable sur un intervalle fermé et fini $[a, b]$ si la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(c_i) \Delta x_i$ existe et ne dépend pas de la partitions de $[a, b]$ ou du choix des points x_k des sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. Lorsque c'est le cas, nous noterons la limite par le symbole

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(c_i) \Delta x_i \quad (4.10)$$

qui s'appelle l'**intégrale définie** de f de a à b puisque pour $i = 0 : x_0 = a$ et pour $i = n : x_n = b$. Les nombres a et b sont respectivement la limite inférieure et la limite supérieure d'intégration, et $f(x)$ est appelée la fonction à intégrer.

La somme qui apparaît dans la définition est appelée une *somme de Riemann*, et l'intégrale définie est parfois appelée l'intégrale de Riemann

○ Historiquement, l'expression " $f(x) dx$ " a été interprétée comme l'aire infinitésimale d'un rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur infiniment petit dx . Par «somme» des aires infinitésimales, toute l'aire de la zone sous la courbe a été obtenue. Le symbole d'intégrale " \int " est un "**S**" allongé utilisé pour indiquer cette sommation.

Théorème 4.3 Fonctions intégrables sur $[a, b]$:

1. Si $f(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors $f(x)$ est intégrable sur cet intervalle.
2. Une fonction bornée sur $[a, b]$ et possédant un nombre fini de points de discontinuité est intégrable sur cet intervalle.
3. Une fonction monotone et bornée sur l'intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

4.3.1 Propriétés

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, α et β deux constantes réelles. On admet, sans démonstration, les propriétés suivants :

Propriété 4.1

Linéarité :

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad (4.11)$$

Propriété 4.2

On a :

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (4.12)$$

Propriété 4.3

Si c est un point de $[a, b]$ et $f(x)$ intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (4.13)$$

Propriété 4.4

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (4.14)$$

Propriété 4.5

Pour tout $x \in [a, b]$ on a

1. si $f(x) \geq 0$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0. \quad (4.15)$$

2. Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \quad (4.16)$$

Propriété 4.6

Pour $a < b$ on a :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (4.17)$$

Propriété 4.7

1. Le produit $f(x)g(x)$ est intégrable sur $[a, b]$.
2. Si $f(x) \geq 0$ et $|f(x)|$ intégrable sur $[a, b]$ alors la fonction $h(x) = \sqrt{f(x)}$ est intégrable sur $[a, b]$.
3. La fonction $\frac{1}{f(x)}$ est intégrable sur $[a, b]$ si $f(x) \neq 0$ en tout point de $[a, b]$.

a) Théorème de la moyenne

Théorème 4.4 Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, et si $f(x)$ est bornée (c'est-à-dire $m \leq f(x) \leq M$) et $g(x)$ garde le signe constant sur $[a, b]$, il existe alors un nombre k , ($m \leq k \leq M$) tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = k \int_a^b g(x) dx \quad (4.18)$$

Démonstration :

Soit $f(x)$ une fonction intégrable sur $[a, b]$ et elle est bornée c'est-à-dire il existe m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$

Soit $g(x)$ une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $g(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ on peut dire que :
 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$

Par suite on a $\int_a^b mg(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b Mg(x) dx$

Donc $\exists k; m \leq k \leq M$ tel que : $\int_a^b f(x)g(x) dx = k \int_a^b g(x) dx$

En particulier :

- Si $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ donc il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $k = f(c)$ et par suite

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

- Si $g(x) = 1$ alors $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b dx = b - a$ par suite :

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

Définition 4.5 Si $f(x)$ est continue, on définit la valeur moyenne de $f(x)$ sur $[a, b]$ par :

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (4.19)$$

4.3.2 Calcul de l'intégral définie

a) Formule de Newton-Leibniz

Dans l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$, fixons la borne inférieure a et faisons varier la borne supérieure b , soit x un point quelconque de $[a, b]$, considérons l'intégrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ qui se présente, ainsi comme fonction de la borne supérieure x .

$$\text{On a : } F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

D'après le théorème de la moyenne, si $f(x)$ est continue, il existe $c \in [x_0, x]$ tel que $\int_{x_0}^x f(t) dt = (x - x_0) f(c)$, donc :

$$F(x) - F(x_0) = (x - x_0) f(c) \Rightarrow \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c)$$

$f(c) \rightarrow f(x_0)$ si $x \rightarrow x_0$ ce qui implique que $F'(x) = f(x)$ sur $[a, b]$ c'est-à-dire $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$.

Pour $x = a : \int_a^a f(t) dt = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$ et :

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

D'où :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (4.20)$$

Cette dernière formule s'appelle la formule de **Newton-Leibniz**.

ä **Exemple 4.30** $I = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \Big|_0^1$
 $= \left(\frac{a}{3} (1)^3 + \frac{b}{2} (1)^2 + c(1) \right) - \left(\frac{a}{3} (0)^3 + \frac{b}{2} (0)^2 + c(0) \right) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c$

b) Changement de Variable

Si $x = \phi(t)$ est une fonction continue et dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et $f(x)$ continue sur $[a, b]$ et si de plus $\phi'(t)$ conserve le signe sur $[\alpha, \beta]$ alors $a = \phi(\alpha)$ et $b = \phi(\beta)$ et dans ces conditions on a la formule de changement de variable

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt \quad (4.21)$$

ä **Exemple 4.31** Soit $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

Faisons le changement de variable : $x = a \sin t$

$$dx = a \cos t dt \text{ et } \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t$$

Pour $x = 0 \Rightarrow a \sin t = 0 \rightarrow t = 0$ et si $x = a \Rightarrow a \sin t = a \Rightarrow \sin t = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ donc

$$I = \int_0^{\pi/2} (a \cos t) (a \cos t) dt = \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - 0 - \frac{\sin 0}{2} \right) = \frac{a^2 \pi}{4}$$

c) Intégration par parties

Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions continues et dérivables sur l'intervalle $[a, b]$.

On a : $d(uv) = (uv)' dx = u dv + v du = u v' dx + u' v dx \Rightarrow \int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u v' dx + \int_a^b u' v dx$

d'où la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v du \quad (4.22)$$

ä **Exemple 4.32** $I = \int_0^1 x e^x dx$

Posons : $u = x \Rightarrow du = dx$ et $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$ alors :

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = (e) - (e - 1) = 1$$

4.4 Applications du calcul intégral

Les applications du calcul intégral sont multiples et variées, en voici quelques exemples en analyse, géométrie et physique.

- Applications en analyse : recherche de primitive, études de suites, études de fonctions définies par une intégrale, résolution d'équations différentielles .
- Applications géométriques : calcul de grandeurs telles que aire d'une surface plane, volume limité par une surface fermée, volume des solides de révolution, longueur d'un arc de courbe.
- Applications physiques : calcul de la valeur moyenne d'une fonction en électricité, calcul de la valeur efficace d'une fonction périodique sur un intervalle, détermination des coordonnées du centre d'inertie d'un solide, calcul du moment d'inertie d'un solide.

4.4.1 Calcul des aires limitées par courbe

a) En coordonnées cartésiennes

On a noté, que par définition $\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire de la zone (trapèze curviligne) limitée par la courbe de la fonction $f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$.

- Si $f(x) \geq 0$ sur le segment $[a, b]$ alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est égale à l'aire du trapèze indiqué.
- Si $f(x) \leq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ donc sa valeur absolue est égale à l'aire du trapèze correspondant.

Si $f(x)$ change le signe sur $[a, b]$, on décomposera l'intégrale sur $[a, b]$ en intégrales partielles positives et négatives, et donc l'aire du domaine est égale à la somme des valeurs absolues des intégrales partielles.

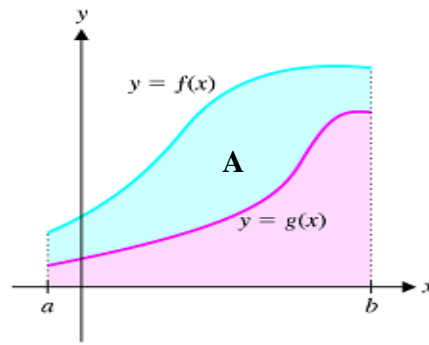


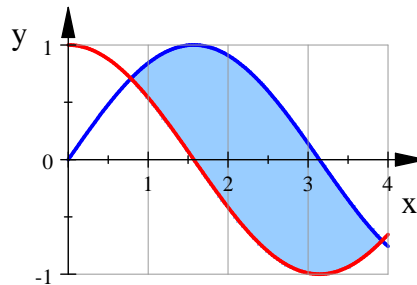
FIG. 4.3 – zone limitée par deux courbes

Si le domaine est limité par les courbes de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ (Figure 3) alors l'aire du domaine est :

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

ä **Exemple 4.33** L'aire de la zone limitée par les deux courbes $y = \sin x$ et $y = \cos x$ dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ est :

$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = 2\sqrt{2}$$



b) En coordonnées polaires

En coordonnées polaires, une courbe est définie par l'équation $r = f(\theta)$ où $f(\theta)$ est une fonction continue pour $\theta \in [\alpha, \beta]$.

L'aire du secteur circulaire d'angle $(\beta - \alpha)$ et de rayon r est :

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta \quad (4.23)$$

En effet, l'air d'un triangle de base a et de hauteur h est : $S = \frac{a \times h}{2}$ (Figure 4), de

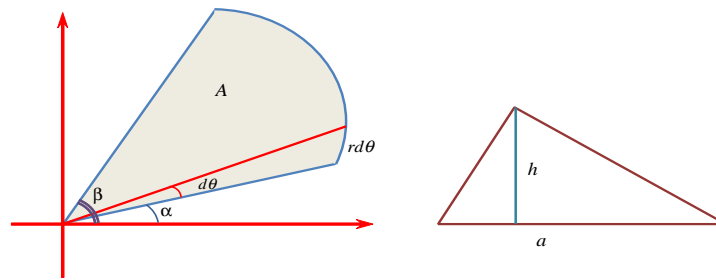
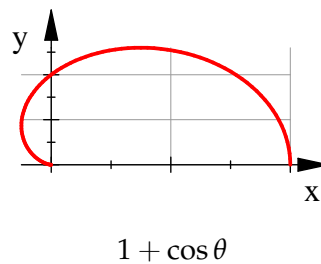


FIG. 4.4 – Zone dans le plan polaire

même l'aire du triangle curviligne élémentaire de côté r et d'angle au sommet $d\theta$ est donc $dS = \frac{1}{2}r \times r d\theta = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ et par suite l'aire du secteur OAB est $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$.

ä **Exemple 4.34** L'aire de la zone limitée par la courbe $r = 1 + \cos \theta$ pour $\theta \in [0, \pi]$ est :

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3}{4}\pi$$



4.4.2 Longueur d'un arc

Un arc est dit rectifiable si on peut décomposer cet arc en des arcs élémentaires infiniment petits d'une façon qu'on peut confondre chaque arc élémentaire avec la corde correspondante.

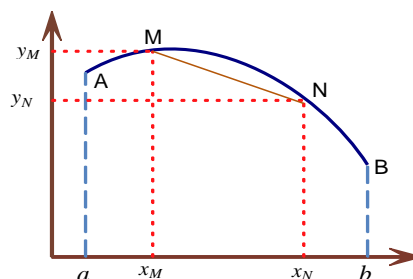


FIG. 4.5 – Arc élémentaire

On décompose l'arc rectifiable \widetilde{AB} en n arcs élémentaires infiniment petits.

Soit \widetilde{MN} un arc élémentaire, tel que $\widetilde{MN} \equiv MN$. La longueur du segment MN est égale au module du vecteur \overrightarrow{MN}

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M) \vec{i} + (y_N - y_M) \vec{j}$$

alors la longueur du segment MN est : $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$

Lorsque le nombre des arcs est infiniment petit, les points M et N sont très proches tel que : $x_N - x_M = dx$ et $y_N - y_M = dy$

la longueur de l'arc élémentaire est

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

a) En coordonnées cartésiennes

Soit (C) la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ définie et intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.

La longueur d'un arc élémentaire de (C) est $d\ell$, on a $dy = y'dx = f'(x)dx$, alors

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

La longueur totale de la courbe est donc :

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2} dx \quad (4.24)$$

b) En coordonnées polaires

Si la courbe est définie par la relation : $r = r(\theta)$, où (r, θ) sont les coordonnées polaires d'un point $M(x, y)$ de la courbe, tels que

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta$$

donc

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (4.25)$$

La longueur d'un arc élémentaire est

$$\begin{aligned} d\ell &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2} \\ &= d\theta \sqrt{(r' \cos \theta - r \sin \theta)^2 + (r' \sin \theta + r \cos \theta)^2} \\ &= d\theta \sqrt{(r' \cos \theta - r \sin \theta)^2 + (r' \sin \theta + r \cos \theta)^2} \\ &= d\theta \sqrt{r'^2 + r^2} \end{aligned}$$

Pour les valeurs de $\theta \in [\alpha, \beta]$, la longueur est :

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta \quad (4.26)$$

4.4.3 Aire et volume d'un solide de révolution

Considérons la courbe de la fonction $y = f(x)$ (ou $x = g(y)$) dans l'intervalle $[a, b]$ (ou pour $y \in [c, d]$). La rotation autour d'un axe implique que chaque point de la courbe décrit un cercle centré sur l'axe de rotation, par suite on obtient un cylindre curviligne.

a) Rotation autour de l'axe Ox

La rotation de la courbe $y = f(x)$ autour de l'axe Ox détermine un volume de révolution. Chaque point $M(x, y)$ de la courbe décrit, dans une section plane, un cercle centré sur l'axe Ox et de rayon $R = y = f(x)$ (figure 6), l'aire du cercle est $S = \pi y^2$, le volume du cylindre élémentaire de hauteur dx est $dV = \pi y^2 dx$, par suite le volume du corps de révolution est :

$$V_X = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (4.27)$$

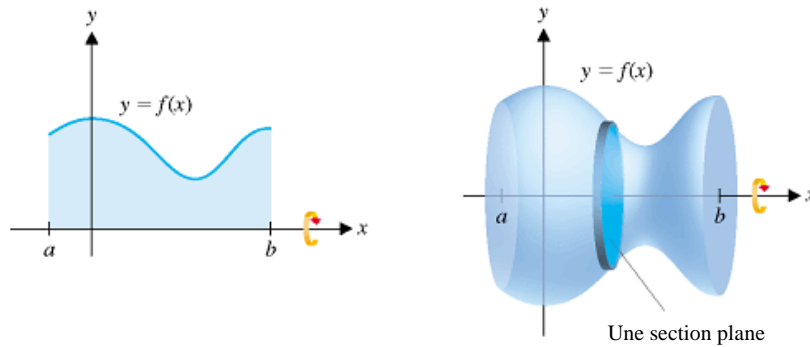


FIG. 4.6 – Rotation autour de l'axe Ox

Pour calculer la surface externe du solide on reprend le cylindre élémentaire dans une section plane (figure 7). Le périmètre du cercle est $L = 2\pi y$ et la longueur d'un arc élémentaire est $d\ell = \sqrt{1 + y'^2} dx$ et donc l'aire de la bande engendrée par rotation de cet arc élémentaire est $dS = L d\ell = 2\pi y d\ell$ donc :

$$S_X = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4.28)$$

b) Rotation autour de l'axe Oy

Considérons la courbe de la fonction $y = f(x)$ définie et continue sur l'intervalle $]a, b[$. On demande de calculer le volume du solide obtenu par rotation de zone limitée par la courbe de $f(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$ autour de l'axe Oy .

Un rectangle élémentaire, au voisinage d'un point d'abscisse x , de largeur dx et hauteur y , (figure 7) détermine par rotation autour de Oy un cylindre de rayon de base x , de hauteur $y = f(x)$ et d'épaisseur dx .

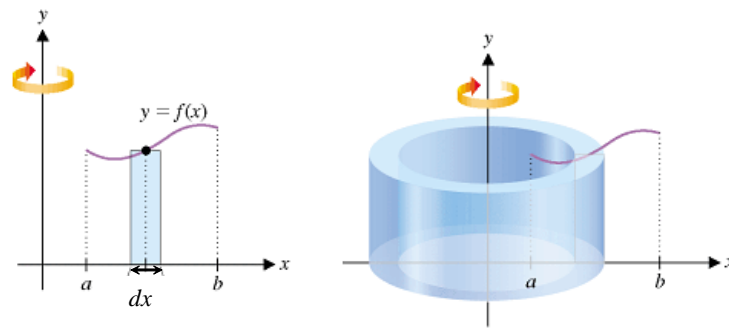


FIG. 4.7 – cylindre élémentaire de révolution du rectangle

En découpant le cylindre de haut en bas, on obtient une forme parallélépipède (figure 8) de longueur égale au périmètre de base ($2\pi x$), de hauteur y et d'épaisseur dx . Le volume de ce parallélépipède est donc $dV = (2\pi x) y dx$

Le volume total du solide de révolution est donné alors par l'intégrale :

$$V_Y = 2\pi \int_a^b xy dx \quad (4.29)$$

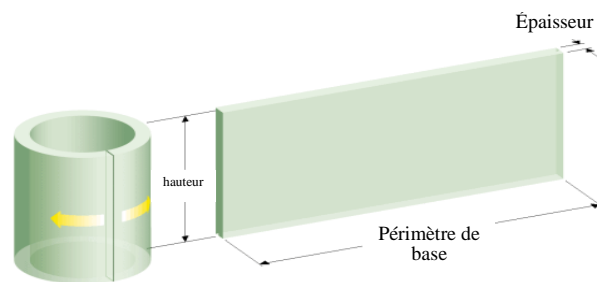
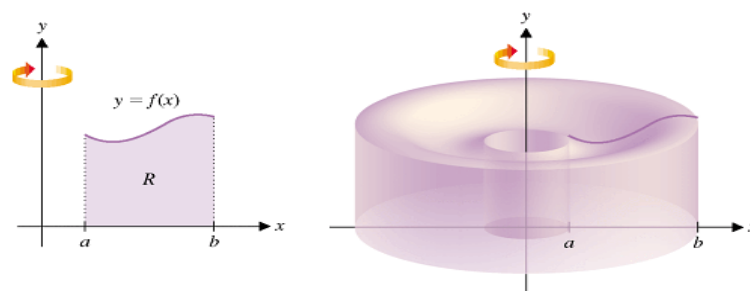


FIG. 4.8 – Découpe du cylindre élémentaire

FIG. 4.9 – Rotation autour de l'axe Oy

L'aire élémentaire de ce corps est $dS_Y = 2\pi x dl$

$$S_Y = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4.30)$$

Si le corps de révolution est généré par rotation de la courbe $x = g(y)$ limitée par les droites $y = c$ et $y = d$ autour de Oy (figure 10) alors le volume peut être calculer par la formule :

$$V_Y = \pi \int_c^d x^2 dy. \quad (4.31)$$

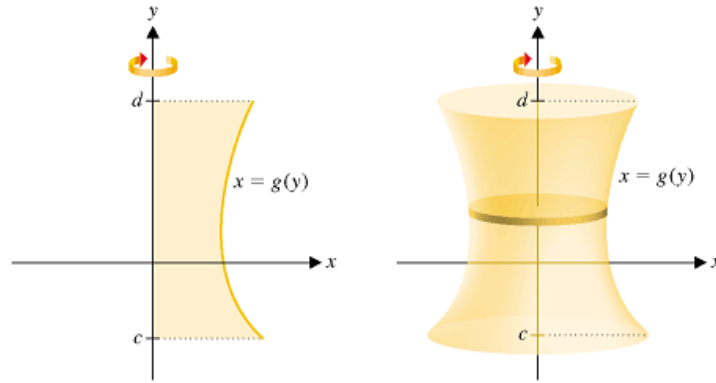
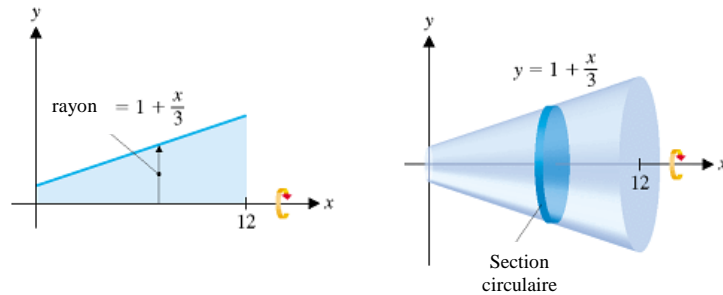


FIG. 4.10 – Rotation de la courbe $g(y)$ autour de Oy

à **Exemple 4.35** Calculons le volume V_x et la surface externe S_x du solide obtenu par révolution autour de Ox du segment de droite $y = 1 + \frac{x}{3}$ avec $0 \leq x \leq 12$.



Le rayon du cercle de révolution est $r = y = 1 + \frac{x}{3}$ donc l'aire d'une section circulaire dans un plan perpendiculaire à l'axe Ox est : $S = \pi y^2 = \pi \left(1 + \frac{x}{3}\right)^2$ et le volume élémentaire est

$$dV = S dx = \pi \left(1 + \frac{x}{3}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 1\right) dx$$

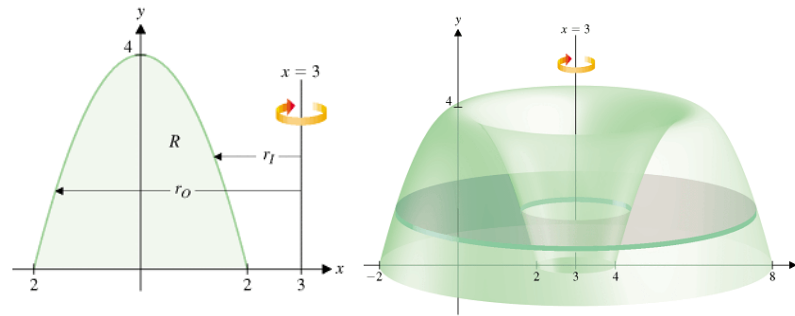
$$\Rightarrow V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \int_0^{12} \pi \left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 1\right) dx = 124\pi$$

$$y = 1 + \frac{x}{3} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} dx = \frac{\sqrt{10}}{3} dx$$

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{2\pi\sqrt{10}}{3} \int_0^{12} \left(1 + \frac{x}{3}\right) dx = 24\sqrt{10}\pi$$

à **Exemple 4.36** Calculons le volume de solide de révolution obtenu par rotation de la courbe $y = 4 - x^2$ pour : $-2 < x < 2$ autour de la droite $x = 3$.



La courbe $y = 4 - x^2$ s'exprime aussi sous la forme $x = \pm\sqrt{4-y}$ avec $y \in]0, 4[$
 Dans un plan perpendiculaire à Oy chaque point de la branche $x = \sqrt{4-y}$ décrit un cercle centré sur $x = 3$ et de rayon $r_1 = 3 - x = 3 - \sqrt{4-y}$ le volume correspondant est :

$$V_1 = \pi \int_0^4 (3 - \sqrt{4-y})^2 dy = 12\pi$$

Les points de la branche $x = -\sqrt{4-y}$ décrivent les cercles de rayons $r_0 = 3 + \sqrt{4-y}$ dont le volume de révolution est V_0 :

$$V_0 = \pi \int_0^4 (3 + \sqrt{4-y})^2 dy = 76\pi$$

Le volume demandé est $V = V_0 - V_1 = (76 - 12)\pi = 64\pi$

4.4.4 Centre de gravité

Le barycentre de barus (poids) et centre est initialement le centre des poids. C'est donc une notion physique et mécanique.

Le premier à avoir étudié le barycentre en tant que centre des poids (ce qu'on appelle de nos jours le centre de gravité) est le mathématicien et physicien **Archimède**. Il est un des premiers à comprendre et expliciter le principe des moments, le principe des leviers et le principe du barycentre. Il écrit dans son traité Sur le centre de gravité de surface plane :

Tout corps pesant a un centre de gravité bien défini en lequel tout le poids du corps peut être considéré comme concentré.

Son principe des moments et des leviers lui permet de construire assez simplement le barycentre de deux points de masses m_1 et m_2 différentes. (Figure 11)

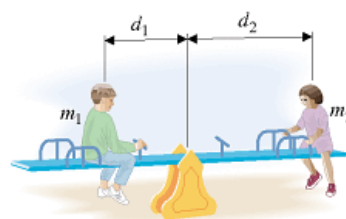


FIG. 4.11 – Balance entre deux masses

Pour que la balance soit en équilibre, il faut que les moments $m_1 d_1$ et $m_2 d_2$ soient égaux. Cette condition se traduit de nos jours par l'égalité vectorielle :

$$m_1 \vec{d}_1 + m_2 \vec{d}_2 = \vec{0}$$

D'après **Christiaan Huygens** (1654) :

Le barycentre d'un système matériel se meut comme si toute la masse du système y était transportée, les forces extérieures du système agissant toutes sur ce barycentre.

Autrement dit c'est un point virtuel (G) tel que sa masse est équivalente à la masse du système et son moment est égale à la résultante de tous les moments du système :

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) d_G = m_1 d_1 + m_2 d_2 + \dots + m_n d_n$$

où m_i sont les masses des points matériels et d_i sont les distances au point de rotation, on trouve donc :

$$d_G = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2 + \dots + m_n d_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i d_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

En réalité le système est un ensemble continu des points matériels ($m_i \mapsto dm$) donc le signe \sum sera remplacé par le signe \int .

Notons que la distance d_G peut être considérée comme coordonnées du centre de gravité G .

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int x dm \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int y dm$$

a) Centre de gravité d'une courbe plane pesante

Soit une courbe matérielle définie par $y = f(x)$ et de densité linéaire de masse $\lambda = \lambda(x)$.

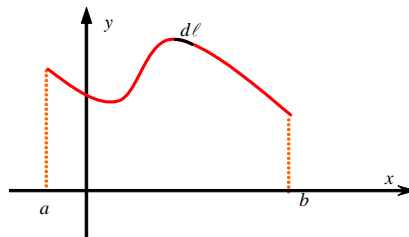


FIG. 4.12 – courbe matérielle

La masse de chaque arc élémentaire de longueur dl , est $dm = \lambda(x) dl$ donc les coordonnées du centre de gravité sont :

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{1}{m} \int_a^b x dm = \frac{1}{m} \int_a^b x \lambda(x) \sqrt{1 + y'^2} dx \\ y_g &= \frac{1}{m} \int_a^b y dm = \frac{1}{m} \int_a^b y \lambda(x) \sqrt{1 + y'^2} dx \end{aligned} \quad (4.32)$$

où

$$m = \int_a^b dm = \int_a^b \lambda(x) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

b) Centre de gravité d'une figure plane

Le centre de gravité de la figure matérielle, de densité surfacique λ , limitée par la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$ et l'axe ox est donné par :

$$\begin{aligned} X_G &= \frac{1}{m} \int_a^b x dm = \int_a^b \lambda(x) x y dx \\ Y_G &= \frac{1}{m} \int_a^b y dm = \frac{1}{m} \int_a^b \lambda(x) y^2 dx \end{aligned} \quad (4.33)$$

où

$$m = \int_a^b dm = \int_a^b \lambda(x) y dx$$

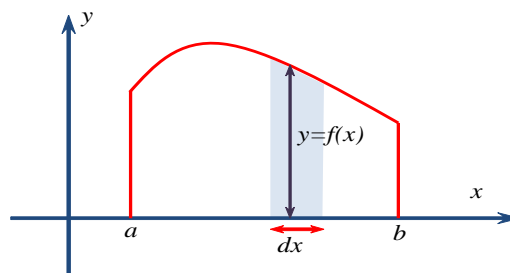
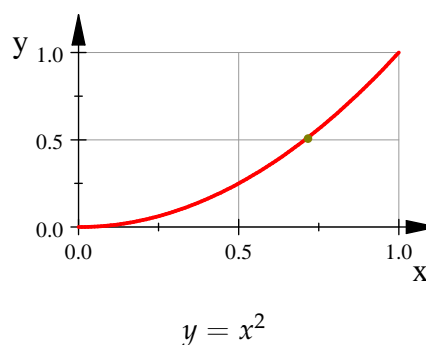


FIG. 4.13 – Figure matérielle plane

En effet, on considère un rectangle élémentaire de largeur dx et longueur y , sa masse est : $dm = \lambda dS = \lambda y dx$.

à **Exemple 4.37** Déterminer le centre de gravité de la branche parabolique $y = x^2$; $0 \leq x \leq 1$ de densité linéaire de masse $\lambda(x) = \frac{x}{8}$



La longueur d'un arc élémentaire de la courbe est $d\ell = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+4x^2}dx$ sa masse est :

$$dm = \lambda d\ell = \frac{x}{8} \sqrt{1+4x^2} dx$$

$$\text{La masse de la courbe est } m = \int_0^1 \lambda(x) d\ell = \int_0^1 \frac{x}{8} \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{5\sqrt{5}-1}{96} = 0.106\,045\,21$$

$$M_x = \int_a^b x dm = \int_0^1 \frac{x^2}{8} \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{9}{256} \sqrt{5} - \frac{1}{512} \ln(\sqrt{5}+2) = 7.579\,216\,4 \times 10^{-2}$$

$$X_G = \frac{M_x}{m} = \frac{7.579\,216\,4 \times 10^{-2}}{0.106\,045\,21} = 0.714\,715\,58$$

$$M_y = \int_a^b y dm = \int_0^1 \frac{x^3}{8} \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{5}{192} \sqrt{5} + \frac{1}{960} = 5.927\,260\,4 \times 10^{-2}$$

$$Y_G = \frac{M_y}{m} = \frac{5.927\,260\,4 \times 10^{-2}}{0.106\,045\,21} = 0.558\,937\,12$$

4.4.5 Moment d'inertie

Le moment d'inertie d'un point matériel de masse m par rapport à axe Δ est définie par : $I_\Delta = mr^2$ où r est la distance à l'axe Δ (figure 14).

Le moment d'inertie d'un système matériel de n points des masses m_k est alors :

$$I_\Delta = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$$

cette dernière relation se généralise pour un corps en considérant la somme continue (\int) au lieu de somme discrète (\sum).

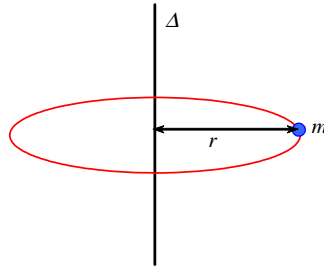


FIG. 4.14 – Rotation autour d'un axe

Soit (C) une courbe de densité de masse linéaire $\lambda = \lambda(x)$ et définie par l'équation $y = f(x)$, pour $x \in [a, b]$, en rotation autour d'un axe Δ . Le moment d'inertie d'un élément de masse $dm = \lambda d\ell$ par rapport à Δ est :

$dI_\Delta = \rho^2 dm = \rho^2 \lambda d\ell = \rho^2 \lambda \sqrt{1+f'(x)^2} dx$ où ρ est la distance d'un point $M(x, y)$ de la courbe à l'axe de rotation.

Alors le moment d'inertie de la courbe (C) est :

$$I_\Delta = \int_a^b \rho^2 \lambda \sqrt{1+f'(x)^2} dx \quad (4.34)$$

En particulier si la rotation se fait autour de l'axe Ox (respectivement Oy) la distance est $\rho = y$ (respectivement $\rho = x$), on aura :

$$\begin{aligned} I_X &= \int_a^b y^2 \lambda dl = \int_a^b y^2 \lambda \sqrt{1+y'^2} dx \\ I_Y &= \int_a^b x^2 \lambda dl = \int_a^b x^2 \lambda \sqrt{1+y'^2} dx \end{aligned} \quad (4.35)$$

D'autre part si la rotation se fait autour de l'origine O alors la distance est $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ par suite :

$$I_O = \int_a^b (x^2 + y^2) \lambda dl = \int_a^b (x^2 + y^2) \lambda \sqrt{1+y'^2} dx \quad (4.36)$$

Pour une figure plane limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$, on a $dm = \lambda y dx$ alors :

$$I_\Delta = \int_a^b \rho^2 \lambda f(x) dx \quad (4.37)$$

4.5 Exercices

Exercice 4.1 Calculer directement les primitives des fonctions suivantes

- | | |
|-----------------------|-------------------------------------|
| 1. $\int 4a^2 x^3 dx$ | 3. $\int (e^{3x} - \sin 2x + x) dx$ |
| 2. $\int \tan^2 x dx$ | 4. $\int \sqrt{x} dx$ |

Exercice 4.2 Calculer par changement de variable les primitives des fonctions suivantes

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|---|
| 1. $\frac{x}{(x+1)^2}$ | 7. $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ | 14. $\frac{\sin^2 x \cos x}{x^2}$ |
| 2. $\frac{x}{2x^2+4}$ | 8. $\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}$ | 15. $\frac{x^2}{\sqrt{2x^3+3}}$ |
| 3. $\frac{1}{e^x+1}$ | 9. $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ | 16. $\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ |
| 4. $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x+1}}$ | 10. $\sqrt{1-x^2}$ | 17. $\frac{\sqrt{\tan x+1}}{\cos^2 x}$ |
| 5. $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ | 11. $\frac{1}{\sqrt{e^x}}$ | 18. $\frac{1}{x \ln x}$ |
| 6. $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$ | 12. $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ | 19. $\frac{1}{\cos^2 x (3 \tan x + 1)}$ |
| | 13. $\cot(5x-7)$ | 20. $\frac{x}{x^4+a^4}$ |

Exercice 4.3 Intégrer par parties les fonctions suivantes

- | | | |
|-----------------------------|------------------|---------------------------------------|
| 1. $x^n \ln x; (n \neq -1)$ | 5. $\arcsin x$ | 8. $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 2. $\int \ln x^2 dx$ | 6. $x \arctan x$ | 9. $\frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}$ |
| 3. $\ln(x^2 + 1)$ | 7. $x \cos^2 x$ | |
| 4. $\ln(1-x)$ | | |

Exercice 4.4 Calculer les intégrales suivantes

- | | |
|---|--|
| 1. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ | 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{52 - 3x - 4x^2}}$ |
| 2. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$ | 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$ |
| 3. $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1} dx$ | 7. $\int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} dx$ |
| 4. $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$ | 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$ |

Exercice 4.5 Intégration des fonctions trigonométriques

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| 1. $\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}$ | 4. $\frac{dx}{\cos^4 x}$ | 7. $\frac{\sin x}{1 + \sin x}$ |
| 2. $\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$ | 5. $\sin x \sin 3x$ | 8. $\frac{1}{4 - \sin x}$ |
| 3. $\sin^4 x \cos^4 x$ | 6. $\cos 4x \sin 7x$ | |

Exercice 4.6 Calculer les intégrales définies suivantes

1. directement

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $\int_{-a}^a e^x dx$ | (d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | (g) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ |
| (b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$ | (e) $\int_1^2 (x^3 - 2x) dx$ | (h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ |
| (c) $\int_0^2 \frac{dx}{1+x}$ | (f) $\int_0^\pi \frac{\sin 2x dx}{1 + \sin^2 x}$ | |

2. par parties

- | | | |
|--|---------------------------|-----------------------------------|
| (a) $\int_0^1 (x^2 - 1) e^{2x} dx$ | (c) $\int_1^e \ln x dx$ | (e) $\int_0^\pi e^{2x} \sin x dx$ |
| (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ | (d) $\int_1^e x \ln x dx$ | (f) $\int_0^1 \arcsin x dx$ |

3. Par changement de variables

- | | | |
|------------------------------|--|--|
| (a) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ | (c) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ | (e) $\int_2^{29} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}+3} dx$ |
| (b) $\int_1^2 \sqrt{x+1} dx$ | (d) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ | (f) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ |

Exercice 4.7 soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

1. Démontrer que I_n , vérifie la relation de récurrence

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

2. Calculer I_n en fonction de n .
3. Déduire I_9 et I_{10} .

Exercice 4.8 Soit l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}; n \in \mathbb{N}$$

1. En intégrant I_n par parties, calculer I_{n+1} en fonction de I_n .
2. Calculer I_0 et I_1 et déduire I_2 et I_3

Exercice 4.9 Calculer l'aire du domaine limité par la parabole $y = \frac{x^2}{2}$, les droites $x = 1$, $x = 3$ et l'axe Ox

Exercice 4.10 Calculer l'aire du domaine limité par la parabole $y = x^2$, la droite $y = x$ pour $0 \leq x \leq 1$

Exercice 4.11 Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $x = 2 - 2y - y^2$ et l'axe Oy

Exercice 4.12 Calculer la longueur de l'arc parabolique $y = 2x^2$ compris entre $x = 0$ et $x = 1$

Exercice 4.13 Calculer la longueur de la courbe définie par les relations paramétriques :
 $x = a(t - \sin t)$ et $y = a(1 - \cos t)$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$

Exercice 4.14 Calculer la longueur de la courbe : $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)

Exercice 4.15 Calculer le volume de corps de révolution de la courbe $y = \sin x$ limité par $0 \leq x \leq \pi$ par rotation : autour de l'axe Ox et autour de l'axe Oy

Exercice 4.16 Calculer le volume de solide formé par rotation autour de l'axe Ox de la figure limité par la parabole $y = 2x - x^2$ et l'axe Ox

Exercice 4.17 On désigne par $f(x)$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

1. Montrer que $f(x)$ s'exprime sous la forme $f(x) = Ax + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ où A, B, C sont des réels à déterminer.
2. Calculer, alors : $I = \int f(x) dx$.
3. En utilisant un changement convenable de variable déduire $J = \int \tan^3 t dt$.

Exercice 4.18 Calculer, par changement de variable, les intégrales suivantes :

$$1. I = \int \frac{dx}{x+1 + \sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$2. J = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

Exercice 4.19 On considère les deux intégrales :

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad J(x) = \int \frac{x^5 + x^3 - x + 1}{x^4 + x^2} dx$$

1. Montrer que $I(x)$ s'exprime sous la forme $I = \int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x^2} dx$, puis calculer I
2. Montrer que $f(x) = \frac{x^5 + x^3 - x + 1}{x^4 + x^2}$ s'exprime sous la forme $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + cx + \frac{Ax+B}{x^2+1}$ et calculer J .

Exercice 4.20 :

1. Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

$$I = \int \frac{dt}{t^2(1-t)} \quad \text{et} \quad J = \int \frac{du}{u^3(1-u^2)}$$

2. Dédurre de ce qui précède les intégrales suivantes :

$$K_1 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} \text{ et } K_2 = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

3. On pose $K = \int \frac{dx}{\sin^3(2x)}$. Exprimer K en fonction de K_1 et K_2 , et en déduire K .

Exercice 4.21 L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale indéfinie suivante

$$I = \int \frac{x^3}{(1+x^3)^2} dx$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante : $\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}$.

En déduire : $J = \int \frac{dx}{1+x^3}$

2. Calculer $K = \int \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^2}$

3. En utilisant une intégration par parties déduire la valeur de I .

Exercice 4.22 On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

1. Montrer, en faisant un changement convenable de variable, que

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

2. Dédurre la valeur de l'intégrale I .

Exercice 4.23 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$$

1. Calculer I_1 et J_1

2. Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+3}$

3. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{(n+1)} J_n$$

Exercice 4.24 Soient

$$I = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \text{ et } J = \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

1. Calculer $I + J$ et $I - J$
2. Dédire I et J .

Exercice 4.25 Soient les intégrales

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \text{ et } J = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$$

1. Montrer que : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx$
2. Utiliser cette relation pour calculer I et J .

Chapitre 5

Equations différentielles

IL est souvent impossible de déterminer une relation directe entre la fonction $y = f(x)$, décrivant un phénomène physique, et la variable x . Mais on peut définir cette fonction indirectement. Une forme de définitions indirectes c'est d'établir la dépendance entre x et y et les dérivées de y : y', y'', \dots telle relation est en générale une équation, appelée équation différentielle, de la forme :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

L'intégration de cette équation nous donne la fonction inconnue y en fonction de la variable indépendante x , la fonction trouvée est une solution de l'équation différentielle.

Par exemple l'équation du mouvement, le long de l'axe ox , d'une particule de masse m soumise à la force F est donnée par la loi fondamentale de la dynamique : $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$, si F est une fonction de x soit $F = -kx$ l'équation s'écrit : $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ c'est une équation différentielle reliant la fonction x , sa dérivée second x'' et la variable t .

Définition 5.1 On appelle équation différentielle toute équation de la forme

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (5.1)$$

Dans laquelle se présentent la fonction inconnue y de la variable indépendante x et les différentes ordres de dérivées y, y', y'', \dots de y .

Définition 5.2 On appelle ordre de l'équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée qui figure dans l'équation.

Définition 5.3 L'équation différentielle est dite équation **ordinaire** si la fonction inconnue est une fonction d'une seule variable indépendante x . Alternativement c'est une équation à **dérivées partielles**.

ä **Exemple 5.1** $xy' + 2y''' = \sin x$ est une équation différentielle **ordinaire** du troisième ordre.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ est une équation à **dérivées partielles** du second ordre

Définition 5.4 On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle toute fonction $f(x)$ qui vérifient identiquement cette équation.

Définition 5.5 On appelle solution générale de l'équation différentielle toute fonction $f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ qui vérifient l'équation différentielle avec des constantes arbitraires C_1, C_2, \dots, C_n .

Une solution vérifiant certaines conditions initiales est une solution particulière. Dans ce cas C_1, \dots, C_n ont des valeurs bien déterminées.

à **Exemple 5.2** $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ est la **solution générale** de l'équation différentielle $y'' + y = 0$

Les fonctions $y(x) = \sin x$, $y = 2 \cos x$, $y = 3 \sin x - \cos x$ sont des solutions **particulières**.

5.1 Equations différentielles du premier ordre

5.1.1 Définition et classification

Une équation différentielle du premier ordre est de la forme :

$$F(x, y, y') = 0 \quad (5.2)$$

Lorsque cette équation est résoluble en y' , on peut la mettre sous la forme $y' = f(x, y)$. On dit alors que l'équation est résoluble par rapport à la dérivée.

Théorème 5.1 Si dans l'équation $y' = f(x, y)$, la fonction $f(x, y)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à y sont continues dans certain domaine D du plan Oxy et si (x_0, y_0) est un point de ce domaine, il existe une solution unique $y = \varphi(x)$ satisfaisant à la condition $y = y_0$ et $x = x_0$.

Géométriquement ce théorème signifie qu'il existe une fonction $y = \varphi(x)$ et une seule dont la courbe représentative passe par le point (x_0, y_0) . Il en résulte du théorème que l'équation (2) possède une infinité de solutions différentes par exemple la solution passant par le point (x_0, y_1) , celle passant par le point (x_0, y_2) etc, pourvu que ces points se trouvent dans le domaine D .

La condition que la fonction y doit prendre la valeur donnée y_0 lorsque $x = x_0$ s'appelle la **condition initiale**. Souvent on l'écrit sous la forme $y_{x=x_0} = y_0$.

Définition 5.6 On appelle solution générale d'une équation du premier ordre, une fonction :

$$y = f(x, C) \quad (5.3)$$

dépendant d'une constante arbitraire C et satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Elle satisfait à l'équation différentielle quelle que soit la valeur particulière donnée à la constante C
2. Quelle que soit la condition initiale $y = y_0$ lorsque $x = x_0$ on peut trouver une valeur $C = C_0$ telle que la fonction $y = f(x, C_0)$ vérifie l'équation différentielle et la condition initiale donnée. $y = f(x, C_0)$ est la solution particulière

Remarque 5.1

En cherchant la solution générale d'une équation différentielle, nous sommes souvent conduits à la forme

$$\phi(x, y, C) = 0 \quad (5.4)$$

non résolue en y . Une solution particulière est donc : $\phi(x, y, C_0) = 0$

ä **Exemple 5.3** La solution générale de l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

est une famille de fonctions $y = \frac{C}{x}$, la solution particulière vérifiant les conditions initiales $y_0 = 1$ lorsque $x_0 = 2$ est $y = \frac{2}{x}$.

De point de vue géométrique, l'intégrale générale représente une famille des courbes planes dépendants d'un paramètre C . La figure 1 montre les courbes intégrales de l'équation précédente pour $C = 1, -3, 8, -8$

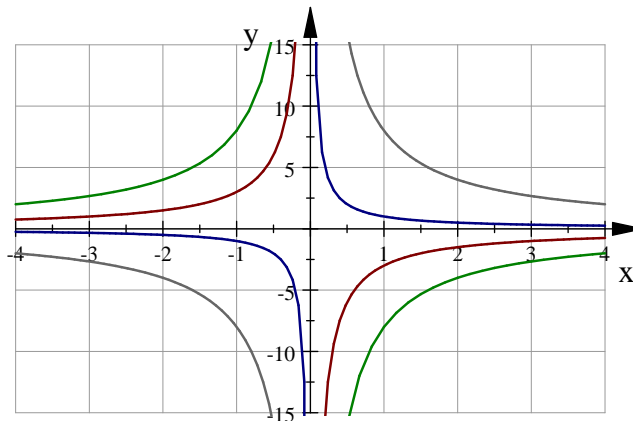


FIG. 5.1 – Famille de solutions de $y' = -\frac{y}{x}$

a) **Classification**

Il y a trois classes principales d'équations différentielles du premier ordre :

1. Equations dont on peut séparer les variables
2. Equations homogènes où y' ne dépend que du rapport y/x
3. Equations linéaires où y et y' sont au premier degré

En dehors de ces types généraux d'équations différentielles du premier ordre, il ya un certain nombre d'équations de types spéciaux : équations de Bernoulli, de Riccati, de Lagrange, de Clairaut, etc.

Dans la suite on va étudier les méthodes de résolution de quelques des équations différentielles du premier ordre.

5.1.2 Equations à variables séparables

Définition 5.7 Une équation différentielle du premier ordre est dite à variables séparables si elle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \quad (5.5)$$

ou le second membre est un produit d'une fonction de x seul par une fonction de y seul ,

Pour intégrer cette équation on fait séparer les variables x et y , alors que l'équation devient :

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$$

la solution se déduit par intégration des deux membres :

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C$$

Une équation de la forme

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \quad (5.6)$$

est aussi une équation différentielle à variables séparables dont l'intégrale générale est

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

de même l'équation

$$M(x) N(y) dx + P(x) Q(y) dy = 0 \quad (5.7)$$

est à variables séparables, elle se met sous la forme

$$\frac{M(x)}{P(x)} dx + \frac{Q(y)}{N(y)} dy = 0$$

en divisant l'équation par $P(x) N(y)$ et l'intégrale générale se déduit directement :

$$\int \frac{M(x)}{P(x)} dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)} dy = C$$

ä Exemple 5.4 Résoudre l'équation : $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$

En divisant par (xy) les deux membres, on obtient :

$$\frac{1+x}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy = 0 \iff \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = 0$$

Intégrons les deux membres :

$$\int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = C$$

$$\Rightarrow \ln|x| + x + \ln|y| - y = C$$

Finalement :

$$\ln|xy| + x - y = C$$

est l'intégrale générale de l'équation donnée.

5.1.3 Equations homogènes

Définition 5.8 Une fonction $f(x, y)$ est dite homogène de degré n par rapport aux variables x et y si l'on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \quad (5.8)$$

ä **Exemple 5.5** La fonction $f(x, y) = xy - x^2$ est homogène de degré 2 :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda y - \lambda^2 x^2 = \lambda^2 (xy - x^2) = \lambda^2 f(x, y)$$

La fonction $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ est homogène de degré zéro :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = f(x, y) = \lambda^0 f(x, y)$$

Définition 5.9 Une équation différentielle, du premier ordre, de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5.9)$$

est dite homogène par rapport à x et y si la fonction $f(x, y)$ est homogène de degré zéro par rapport à x et y , c'est-à-dire si $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$

ä **Exemple 5.6** l'équation $y' = \frac{y}{x}$ est une équation homogène.

a) Solution d'une équation homogène

La méthode générale d'intégration d'une équation homogène est de la rendre en une équation à variable séparable par changement des variables.

On a par hypothèse $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, pour $\lambda = \frac{1}{x}$, on obtient $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, c'est-à-dire qu'une fonction homogène de degré zéro dépend seulement du rapport $\frac{y}{x}$.

Posant $u = \frac{y}{x}$ soit $y = ux$

La différentielle de y nous donne : $dy = u dx + x du$ ou bien

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

et l'équation différentielle devient à variables séparables :

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u) \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{f(1, u) - u}$$

Substituant, après intégration, $\frac{y}{x}$ à u on obtient l'intégrale générale de l'équation (9)

à **Exemple 5.7** Intégrons l'équation $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$.

Le second membre est une fonction homogène de degré zéro :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \lambda y}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2 (x^2 - y^2)} = \frac{xy}{x^2 - y^2} = f(x, y)$$

donc l'équation différentielle est homogène.

Faisons le changement de variable $\frac{y}{x} = u$, c'est-à-dire $y = ux$ et donc

$$y' = \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

le second membre s'écrit :

$$\frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{ux^2}{x^2 - u^2x^2} = \frac{u^2}{1 - u^2}$$

alors :

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1 - u^2}$$

ou bien

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1 - u^2} - u = \frac{u^3}{1 - u^2}$$

en séparant les variables, elle devient :

$$\frac{1 - u^2}{u^3} du = \frac{dx}{x} \iff \frac{du}{u^3} - \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$$

En intégrant les deux membres on obtient :

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln |u| = \ln |x| + C_1 \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = \ln |Cux|$$

Remplaçons u par $\frac{y}{x}$, la solution s'écrit :

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln |Cy|$$

Ou finalement :

$$x = y \sqrt{-2 \ln |Cy|} = y \sqrt{\ln \left| \frac{1}{(Cy)^2} \right|}$$

Remarque 5.2

Une équation de la forme

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

ne sera homogène que si les fonctions $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont homogènes de même degré.

5.1.4 Equations se ramenant aux équations homogènes

Toute équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} \quad (5.10)$$

se ramène en une équation homogène.

Si $c = \gamma = 0$ l'équation est évidemment homogène.

Si c et γ ne sont pas nuls, on fait le changement des variables :

$$x = x_1 + h; \quad y = y_1 + k$$

alors $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$, en substituant dans l'équation différentielle on trouve :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a(x_1 + h) + b(y_1 + k) + c}{\alpha(x_1 + h) + \beta(y_1 + k) + \gamma} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha h + \beta k + \gamma}$$

On choisit les paramètres h et k d'une manière que :

$$ah + bk + c = 0$$

$$\alpha h + \beta k + \gamma = 0$$

c'est-à-dire :

$$h = -\frac{b\gamma - c\beta}{b\alpha - a\beta}$$

$$k = \frac{-c\alpha + a\gamma}{b\alpha - a\beta}$$

ä **Exemple 5.8** soit l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$

Pour ramener cette équation en équation homogène, on pose

$$x_1 = x + h \text{ et } y_1 = y + k$$

donc :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}$$

Résolvant le système :

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases}$$

on trouve : $\{k = 1, h = 2\}$ on obtient ainsi l'équation homogène :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1} = \frac{1 + \frac{y_1}{x_1}}{1 - \frac{y_1}{x_1}}$$

posons : $y_1 = ux_1$, l'équation s'écrit : $u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1 + u}{1 - u}$

Séparons les variables u et x_1 :

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1 + u}{1 - u} - u = \frac{1 + u^2}{1 - u} \Rightarrow \frac{1 - u}{1 + u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}$$

On a :

$$\int \frac{1-u}{1+u^2} du = \arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2)$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \ln x_1$$

donc : $\arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln x_1 + C = \ln x_1 + \ln K$
 $\implies \arctan u = \ln x_1 + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + \ln K = \ln \left| Kx_1 \sqrt{1+u^2} \right|$

$$Kx_1 \sqrt{1+u^2} = \exp(\arctan u)$$

et finalement en remplaçant x_1 et y_1 par leurs valeurs :

$$K \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \exp\left(\arctan \frac{y-1}{x-2}\right)$$

5.1.5 Equations linéaires du premier ordre

Ces équations sont les plus importantes, car on les rencontre constamment en physique

Définition 5.10 On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation de la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad (5.11)$$

où a, b et f sont des fonctions continues de la variable x

Lorsque le second membre $f(x)$ est nul on dit que l'équation différentielle linéaire (11) est homogène ou sans second membre.

a) Premier cas : Equations linéaires sans second membre

Considérons l'équation

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (5.12)$$

La résolution est très simple, car on se ramène à l'équation à variables séparables et l'intégration est immédiate :

$$a(x) \frac{dy}{dx} = -b(x)y \implies \frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)} dx = -A(x) dx$$

En intégrant les deux membres : $\int \frac{dy}{y} = -\int A(x) dx + C$ on trouve :

$$\ln |y| = -P(x) + C$$

ou encore :

$$y(x) = Ke^{-P(x)}$$

où $P(x)$ est une primitive de $A(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ et $K = e^C$.

ä **Exemple 5.9** Intégrons $y' - \frac{2y}{1+x} = 0$

On écrit l'équation sous la forme :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{1+x}$$

Séparons les variables et intégrons les deux membres :

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{1+x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{1+x}$$

L'intégration nous donne :

$$\ln |y| = 2 \ln |1+x| + C = \ln (1+x)^2 + \ln k = \ln (k(1+x)^2) \text{ et par suite}$$

$$y = k(1+x)^2$$

ä **Exemple 5.10** Considérons l'équation différentielle :

$$y' + 2xy = 0$$

elle s'écrit : $\frac{dy}{dx} = -2xy \iff \frac{dy}{y} = -2xdx$, intégrons les deux membres :

$$\ln |y| = -x^2 + C \Rightarrow y = e^{-x^2+C}$$

d'où :

$$y = ke^{-x^2}$$

b) Deuxième cas : Equations linéaires avec second membre

La solution générale de l'équation avec second membre (EASM)

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

est une combinaison de la solution générale (y_1) de l'équation sans second membre (ESSM) et une solution particulière (y_2) de l'EASM.

$$y = y_1 + y_2$$

On résout d'abord l'ESSM associée à l'équation précédente : $a(x)y' + b(x)y = 0$ ce qui permet de séparer les variables et, puis d'intégrer. La solution est de la forme :

$$y_1 = k \exp \left(- \int A dx \right) = ke^{-P(x)}$$

où $P(x)$ est une primitive de $A(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$.

On considère maintenant que y_1 est une solution de l'équation avec second membre à condition de considérer k non plus constante, mais comme une fonction inconnue de x . (ça équivaut à dire $k = k(x) = y_1 \exp(P)$ et on a toujours le droit de faire car l'exponentielle ne s'annule pas).

Car, en effet, la fonction $y_1 = ke^{-P(x)}$ avec sa dérivée y_1' nous donne nécessairement $a(x)y_1' + b(x)y_1 = 0$ pour chaque valeur constante de k , mais nous sommes besoin d'une solution telle que $a(x)y' + b(x)y = f(x)$.

Il est, donc, plus commode de considérer la solution $y_2 = ke^{-P(x)}$ mais on suppose que $k = k(x)$.

Cette méthode est dite la méthode de **variation des constantes**.

Avec telle hypothèse on aura :

$$\begin{aligned} y_2' &= \frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx} \left(k(x) e^{-P(x)} \right) = k'e^{-P} - kP'e^{-P} \\ &= k'e^{-P} - kAe^{-P} = k'e^{-P} - k\frac{b}{a}e^{-P} = k'e^{-P} - \frac{b}{a}y_2 \end{aligned}$$

puisque $A = \frac{b}{a}$ et $P = \int Adx$.

Substituant dans l'équation générale $a(x)y' + b(x)y = f(x)$:

$$a \left(k'e^{-P} - \frac{b}{a}y_2 \right) + by_2 = f(x) \implies ak'e^{-P} = f(x)$$

et finalement :

$$k(x) = \int \frac{f(x)}{a(x)} e^{-P(x)} dx$$

enfin la solution générale de l'équation avec second membre devient

$$y = k \exp(-P) + \left(\int \frac{f(x)}{a(x)} e^{-P(x)} dx \right) \exp(-P). \quad (5.13)$$

ä **Exemple 5.11** Cherchons la solution générale de l'équation : $y' - \frac{y}{x} = x^2$

– L'équation sans second membre est : $y' - \frac{y}{x} = 0$
en séparant les variables, elle s'écrit :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

en intégrant les deux membres, on trouve :

$$\ln |y| = \ln |x| + C$$

d'où la solution générale de l'équation homogène :

$$y_1 = kx$$

– Pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre on suppose que $k = k(x)$ alors $y' = k'x + k$ et substituons dans l'équation avec second membre :

$$k'x + k - \frac{kx}{x} = x^2 \Rightarrow k' = x \text{ donc } k(x) = \frac{x^2}{2} \text{ et la solution particulière de l'EASM est}$$

$$y_2 = k(x)x = \frac{x^3}{2}$$

Finalement la solution générale de l'EASM est donc :

$$y = kx + \frac{x^3}{2}$$

à **Exemple 5.12** Soit l'équation $y' \cos x + y \sin x = 1$

Résolvons d'abord l'équation sans second membre qui s'écrit : $y' + y \tan x = 0$ ou en séparant les variables : $\frac{dy}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x} dx$.

L'intégration des deux membres nous donne : $\ln |y| = \ln |\cos x| + C = \ln |\cos x| + \ln k$ et on trouve

$$y_1 = k \cos x$$

Considérons maintenant k comme une fonction inconnue de x , et dérivons

$$y_2 = k(x) \cos x \Rightarrow y' = k' \cos x - k \sin x$$

Portons dans l'équation complète, en remplaçant y par sa valeur :

$$(k' \cos x - k \sin x) \cos x + k \cos x \sin x = 1$$

soit $k' \cos^2 x = 1$ ou encore $k' = \frac{1}{\cos^2 x}$ d'où en intégrant : $k = \tan x$
d'où la solution générale de l'équation complète :

$$y = k \cos x + \tan x \cos x = k \cos x + \sin x$$

c) Equation à coefficients constants et second membre constant

C'est une équation de la forme :

$$y' + ay = b \quad (5.14)$$

où a et b sont deux constants et non plus des fonctions quelconques.

On peut dans ce cas séparer les variables, en conservant le second membre :

$$y' = \frac{dy}{dx} = b - ay \Rightarrow \frac{dy}{b - ay} = dx \Rightarrow -\frac{1}{a} \ln |b - ay| = x + C$$

et on tire facilement y .

Remarque 5.3

Si l'équation différentielle est donnée sous la forme $Ay' + By = C$ alors elle s'écrit immédiatement

$$y' + \frac{B}{A}y = \frac{C}{A} \iff y' + ay = b$$

ä **Exemple 5.13** Soit l'équation

$$y' - 4y = 2$$

on peut écrire successivement :

$$\frac{dy}{dx} = 2 + 4y \implies \frac{dy}{2 + 4y} = dx$$

$$\implies \frac{1}{4} \ln |2 + 4y| = x + C \implies \ln |2 + 4y| = 4x + 4C$$

$$\implies 2 + 4y = \exp(4x + 4C)$$

$$\implies y = \frac{1}{4} (\exp(4x + 4C) - 2) = \frac{1}{4} e^{4C} e^{4x} - \frac{1}{2}$$

Soit :

$$y = ke^{4x} - \frac{1}{2}$$

5.1.6 Equations des types spéciaux

Dans la suite on va considérer des équations différentielles des types spéciaux dont on limitera l'étude à la recherche de la solution générale :

a) Equations de Bernoulli

L'équation de Bernoulli est une équation différentielle du premier ordre dont la forme générale est :

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (5.15)$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues de x (ou des constantes) et $n \neq 0, n \neq 1$ si non on aura une équation linéaire.

L'équation de Bernoulli se ramène à une équation linéaire par les transformations suivantes :

1. Divisant les deux membres de l'équation par y^n on obtient :

$$y'y^{-n} + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$$

2. Faisant le changement de variable :

$$z = y^{-n+1} \Rightarrow z' = (-n + 1)y^n y'$$

3. Substituant dans la dernière équation on obtient :

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x) \text{ ou } : z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

C'est bien une équation linéaire en z .

On détermine y à partir de z par la relation $y = \sqrt[1-n]{z}$

ä **Exemple 5.14** Considérons l'équation :

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$$

Divisant par y^3 on obtient :

$$\frac{dy}{dx} y^{-3} + xy^{-2} = x^3$$

posons $z = y^{-2}$, sa dérivée est : $z' = -2y'y^{-3}$, substituant dans l'équation différentielle on obtient : $-\frac{1}{2}z' + xz = x^3$ ou bien :

$$z' - 2xz = -2x^3$$

c'est une équation linéaire du premier ordre en z .

– L'équation sans second membre nous donne : $\frac{dz}{z} = -2x dx$, dont l'intégrale est : $z_1 = ke^{x^2}$

– on suppose que $k = k(x)$ alors $z' = k'e^{x^2} + 2xke^{x^2}$ d'où :

$$k'e^{x^2} + 2xke^{x^2} - 2xke^{x^2} = -2x^3$$

$$k' = -2x^3 e^{-x^2}$$

$$\text{Intégrons } k', \text{ on obtient : } k = -2 \int x^3 e^{-x^2} dx = (x^2 + 1) e^{-x^2}$$

$$\text{et } z_2 = k(x) e^{x^2} = x^2 + 1$$

$$\text{La solution générale de l'EASM est : } z = z_1 + z_2 = ke^{x^2} + x^2 + 1$$

Finalement $z = y^{-2}$ soit :

$$y = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{ke^{x^2} + x^2 + 1}}$$

b) Equation de Ricatti

L'équation de Ricatti est une équation différentielle non linéaire de forme générale :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (5.16)$$

Si $a(x) = 0$ l'équation (16) est une équation linéaire.

Si $c(x) = 0$ l'équation (16) est celle de Bernoulli.

Pour qu'on puisse résoudre une équation de Ricatti il est nécessaire d'en connaître une solution particulière y_1 .

Posons alors $y = z + y_1$ où z est une fonction à déterminer.

En dérivant y et en remplaçant dans l'équation 16, on obtient :

$$\begin{aligned} z' + y_1' &= a(z + y_1)^2 + b(z + y_1) + c \\ &= az^2 + ay_1^2 + 2azy_1 + bz + by_1 + c \end{aligned}$$

or y_1 est une solution de l'équation différentielle donc : $y_1' = ay_1^2 + by_1 + c$ ce qui entraîne $z' = az^2 + (2ay_1 + b)z$

L'équation en z est donc une équation de Bernoulli avec $n = 2$ dont on peut la résoudre.

à Exemple 5.15 Intégrons l'équation

$$y'(1 - x^3) + 2xy^2 - x^2y - 1 = 0$$

sachant que $y_1 = x$ est une solution particulière.

Posons $y = z + x$ alors $y' = z' + 1$, en portant y et y' dans l'équation proposée on trouve :

$$(z' + 1)(1 - x^3) + 2x(z + x)^2 - x^2(z + x) - 1 = 0$$

On écrit :

$$z'(1 - x^3) + 1 - x^3 + 2xz^2 + 2x^3 + 4x^2z - x^2z - x^3 - 1 = 0$$

et finalement on aura :

$$z'(1 - x^3) + 3x^2z + 2xz^2 = 0$$

La dernière équation est celle de Bernoulli. Avec $z \neq 0$ divisons par z^2 on obtient :

$$z'z^{-2}(1 - x^3) + 3x^2z^{-1} + 2x = 0$$

posons $u = z^{-1}$ donc $u' = -z'z^{-2}$ et l'équation s'écrit en fonction de u :

$$u'(1 - x^3) - 3x^2u = 2x$$

ou

$$u' - \frac{3x^2}{1 - x^3}u = \frac{2x}{1 - x^3} \text{ avec } x \neq 1$$

C'est une équation linéaire en u dont la solution générale est : $u = \frac{k + x^2}{1 - x^3}$ et par suite

$$z = \frac{1}{u} = \frac{1 - x^3}{k + x^2}$$

Finalement la solution générale de l'équation de Riccati est :

$$y = \frac{1 - x^3}{k + x^2} + x = \frac{1 + kx}{k + x^2}$$

c) Equation de Lagrange

C'est une équation linéaire en x et y soit

$$y + a(y')x + b(y') = 0 \quad (5.17)$$

On pose $z = y' = \frac{dy}{dx}$

L'équation s'écrit

$$y + a(z)x + b(z) = 0$$

en dérivant cette équation par rapport à x ,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{da}{dx}x + a + \frac{db}{dx} = 0$$

Or $\frac{da}{dx} = \frac{da}{dz} \frac{dz}{dx} = a' \frac{dz}{dx}$ et de même $\frac{db}{dx} = b' \frac{dz}{dx}$ nous avons :

$$z + a' \frac{dz}{dx}x + a + b' \frac{dz}{dx} = 0$$

soit alors

$$z + a(z) + (xa' + b') \frac{dz}{dx} = 0$$

c'est-à-dire

$$(z + a(z)) \frac{dx}{dz} + xa' + b' = 0$$

si $a(z) \neq -z$ cette équation est linéaire en x et $\frac{dx}{dz}$

On obtient d'une manière générale

$$x = k\varphi(z) + \psi(z)$$

avec $y = -a(z)x - b(z)$

à Exemple 5.16 On cherche à résoudre $xy' + y + y^2 = 0$

On pose $y' = \frac{dy}{dx} = z$, l'équation devient : $xz + y + z^2 = 0$ ou $y = -xz - z^2$

En dérivant par rapport à x : $\frac{dy}{dx} = -z - x \frac{dz}{dx} - 2z \frac{dz}{dx}$

Soit : $z = -z - (x + 2z) \frac{dz}{dx} \iff 2z \frac{dz}{dx} + x = -2z$

C'est une équation linéaire en x et $\frac{dx}{dz}$ sa solution est $x = \frac{C}{\sqrt{|z|}} - \frac{2}{3}z$ alors

$$y = -xz - z^2 = -\left(\frac{C}{\sqrt{|z|}} - \frac{2}{3}z\right)z - z^2 = -\frac{Cz}{\sqrt{|z|}} - \frac{1}{3}z^2$$

On obtient uniquement un paramétrage des courbes intégrales

$$\begin{cases} x = \frac{C}{\sqrt{|z|}} - \frac{2}{3}z \\ y = -\frac{Cz}{\sqrt{|z|}} - \frac{1}{3}z^2 \end{cases}$$

d) Equation de Clairaut

L'équation de Clairaut est une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$y = xy' + \psi(y') \quad (5.18)$$

Où ψ est une fonction de la dérivée y' seule.

C'est, donc, une équation de Lagrange avec $a = -y'$

Introduisant la variable $z = y' = \frac{dy}{dx}$ donc l'équation s'écrit :

$$y = xz + \psi(z)$$

et dérivons la par rapport à x :

$$\frac{dy}{dx} = z = xz' + z + \frac{d\psi}{dz} \frac{dz}{dx} = xz' + z + z'\psi'$$

donc : $z'(x + \psi') = 0$ et on obtient deux équations :

1. La première équation :

$$z' = 0$$

en intégrant, on trouve $z = \frac{dy}{dx} = K$ c'est-à-dire $y = Kx + \psi(K)$

2. La deuxième équation $x + \psi'(z) = 0$

A partir de cette dernière relation on tire $z = z(x)$ et en substituant dans l'équation de Clairaut on trouve :

$$y = xz(x) + \psi(z(x))$$

Remarque 5.4

Cette dernière solution ne peut pas être tirée de la solution

$$y = Kx + \psi(K)$$

par variation de la constante K . On dit que cette solution est singulière.

à **Exemple 5.17** Considérons l'équation :

$$y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

La solution singulière est obtenue par remplacement y' par K :

$$y = Kx + \frac{aK}{\sqrt{1+K^2}}$$

$$\psi(z) = \frac{az}{\sqrt{1+z^2}} \Rightarrow \psi' = \frac{d}{dz} \left(\frac{az}{\sqrt{1+z^2}} \right) = \frac{a}{(\sqrt{1+z^2})^3} = -x$$

$$y = xz + \frac{az}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{az}{(\sqrt{1+z^2})^3} + \frac{az}{\sqrt{1+z^2}} = a \frac{z^3}{(\sqrt{1+z^2})^3}$$

Eliminant z entre x et y on trouve la solution singulière :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

5.2 Equations différentielles du second ordre

Définition 5.11 On appelle équation différentielle du second ordre toute relation de la forme

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (5.19)$$

entre la variable x , la fonction $y(x)$ et ses deux dérivées premières.

Sous certaines conditions une équation différentielle du second ordre admet une infinité de solutions dépendantes de deux constantes arbitraires : $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

L'ensemble de ces solutions constitue l'intégrale générale et représente l'équation d'une famille de courbes dépendant de deux paramètres qui sont appelées courbes intégrales.

Une intégrale particulière est obtenue en imposant des conditions initiales. Le plus souvent elles se présentent de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$. Dans ce cas, la courbe est assujettie à deux conditions : Passer par un point (x_0, y_0) et avoir un coefficient de tangente donné y'_0 .

En cinématique, les conditions initiales sont celles de la position du mobile et de sa vitesse à l'instant initial.

Inversement à toute courbe $f(x, y, C_1, C_2) = 0$ on peut associer une équation différentielle du second ordre.

à **Exemple 5.18** $y'' + \omega y = 0$ admet pour solutions sur \mathbb{R} les fonctions $\varphi_1(x) = \sin \omega x$ et $\varphi_2(x) = \cos \omega x$.

à **Exemple 5.19** $y'' = 0$ admet pour solutions tout polynôme de la forme $ax + b$ avec a et b deux constantes arbitraires.

5.2.1 Equations différentielles se ramenant au premier ordre

a) Equations ne contenant pas de y

C'est une équation qui se ramène en une équation du premier ordre par changement de variable.

Elle est de la forme

$$F(x, y', y'') = 0. \quad (5.20)$$

On pose $y' = z(x)$ alors $y'' = z'$, et l'équation devient du premier ordre sous la forme :

$$F(x, z, z') = 0$$

ä **Exemple 5.20** Soit l'équation $y'' + y'^2 = 0$

On pose $z = y'$ et donc $z' = y''$, substituons dans l'équation originale, on obtient :

$$z' + z^2 = 0$$

Séparons les variables :

$$\frac{dz}{z^2} = -dx$$

et intégrons les deux membres, on obtient :

$$\frac{1}{z} = x + C$$

c'est-à-dire :

$$z = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + C}$$

Finalement en intégrant, on aura :

$$y = \ln|x + C| + k$$

b) Equations ne contenant pas de x

C'est une équation de la forme :

$$F(y, y', y'') = 0$$

Si on considère que y' est une fonction de y , on peut donc poser $y' = z(y) = \frac{dy}{dx}$ et $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = z'z$ et l'équation devient :

$$F(y, z, zz') = 0 \quad (5.21)$$

qui est une équation du premier ordre en z et dont la variable est y .

La solution est : $z = \varphi(y, \lambda_1) = \frac{dy}{dx}$ par

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, \lambda_1)} + \lambda_2$$

5.2.2 Equations linéaires à coefficients Variables

Définition 5.12 On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation de la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \quad (5.22)$$

où $a(x), b(x), c(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues de la variable indépendante x

On associe à cette équation l'équation sans second membre :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (\text{ESSM})$$

Théorème 5.2 La solution générale s'obtient en ajoutant à une intégrale particulière (Y_p) de l'équation complète (21) l'intégrale générale (Y_G) de l'équation sans second membre (ESSM).

$$Y = Y_p + Y_G \quad (5.23)$$

a) Intégration de l'équation sans second membre

1. Si on connaît deux intégrales particulières y_1 et y_2 :

La solution générale s'écrit : $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Les deux intégrales doivent être linéairement indépendantes, ce qui se traduit par

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.24)$$

$w(x)$ est appelé le **Wronskien**.

2. Si on connaît une intégrale particulière y_1

On pose $y = y_1z$ où $z = z(x)$ est une fonction inconnue de x alors, $y' = y_1'z + z'y_1$; $y'' = y_1''z + z''y_1 + 2y_1'z'$ et d'où en remplaçant dans (ESSM)

$$\begin{aligned} a(y_1''z + z''y_1 + 2y_1'z') + b(y_1'z + z'y_1) + cy_1 &= 0 \\ [ay_1'' + by_1' + cy_1]z + ay_1z'' + (2ay_1' + by_1)z' &= 0 \end{aligned}$$

on a y_1 est une solution de (ESSM) donc : $a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1 = 0$ soit :

$$ay_1z'' + (2ay_1' + by_1)z' = 0$$

Cette équation s'intègre comme une équation se ramenant à une équation du premier ordre .

3. Si on ne connaît pas de solution particulière.

Ce n'est généralement pas intégrable sauf si a, b et c sont des constantes.

ä Exemple 5.21 Intégrer l'équation différentielle :

$$xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$$

où $y_p = e^x$ est une solution particulière.

On pose $y = ze^x$ où $z = z(x)$ une fonction inconnue à déterminer, on a alors $y' = (z' + z)e^x$ et $y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$.

Substituons dans l'équation différentielle, en simplifiant e^x :

$$x(z'' + 2z' + z) - (x + 2)(z' + z) + 2z = 0$$

ou bien

$$xz'' + (x - 2)z' = 0$$

Cette équation se ramène à une équation du premier ordre, soit en posant $u = z'$ et $u' = z''$

$$xu' + (x - 2)u = 0$$

en séparant les variables, on écrit :

$$\frac{du}{u} = -\frac{x-2}{x}dx$$

On déduit :

$$\ln u = -x + 2 \ln x + C = \ln e^{-x} + \ln x^2 + \ln K = \ln (Kx^2 e^{-x})$$

Soit $u = z' = Kx^2 e^{-x}$

$$z = \int u(x) dx = K \int x^2 e^{-x} dx = -Ke^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C$$

Finalement

$$\begin{aligned} y &= (-Ke^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C) e^x = e^x (C - Ke^{-x} (x^2 + 2x + 2)) \\ &= Ce^x - K(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

b) Intégration de l'équation complète, méthode de Lagrange

1. Si on connaît une solution particulière y_p .

La solution générale est alors :

$$y_g = y_p + y_{essm} \quad (5.25)$$

ä **Exemple 5.22** L'équation :

$$x^2 y'' + xy' - y = x^3 \quad (E)$$

admet pour solution de l'équation sans second membre

$$y_{essm} = \frac{k_1}{x} + k_2 x$$

A la vue du second membre, l'intégrale particulière est un polynôme du troisième degré

$y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On obtient donc en remplaçant dans (E) : $y_p = \frac{x^3}{8}$ d'où

$$y_g = \frac{x^3}{8} + \frac{k_1}{x} + k_2 x$$

2. Si on ne connaît pas de solution particulière.

On applique la **méthode de Lagrange** appelée aussi méthode de la variation de la constante. Elle ne doit être employée qu'en dernier recours (surtout en physique).

Soit l'intégrale générale de l'équation sans second membre $y_{essm} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ dans laquelle on va faire varier les constantes c'est à dire que $c_1 = c_1(x)$ et $c_2 = c_2(x)$. L'équation différentielle fournissant une première relation pour déterminer ces deux fonctions, il nous sera possible d'en imposer une seconde.

On dérive $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ pour obtenir $y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$

Attention

Si nous n'imposons pas de condition supplémentaire, le calcul de y'' montre que l'on est ramené à une équation du second ordre, mais avec deux fonctions inconnues au lieu d'une !

Imposons donc la condition :

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \quad (\star)$$

donc y' devient : $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$. En dérivant on obtient

$$y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$$

Il vient en reportant dans l'équation (22) :

$$a (c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'') + b (c_1 y_1' + c_2 y_2') + c (c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x)$$

On réécrit :

$$a (c_1' y_1' + c_2' y_2') + a (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + b (c_1 y_1' + c_2 y_2') + c (c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x) \quad (5.26)$$

alors on a $a (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + b (c_1 y_1' + c_2 y_2') + c (c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$, car y_1 et y_2 sont des solutions particulières, la dernière équation se simplifie en :

$a(x) \neq 0$, donc

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{f(x)}{a(x)} \quad (b)$$

équation à laquelle il faut adjoindre la condition (\star) . Nous sommes conduits à résoudre le système

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{f(x)}{a(x)} \end{cases} \quad (5.27)$$

Comme y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes alors on a $w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$

Le système précédent est un système de Cramer et détermine c_1' et c_2' , on a alors les solutions $c_1(x)$ et $c_2(x)$ qui par intégration dépendent chacune d'une constante arbitraire, d'où la solution générale.

5.2.3 Equations linéaires à coefficients constantes

Définition 5.13 C'est l'équation de forme générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (5.28)$$

où a, b et c sont des constantes et $f(x)$, le second membre est une fonction, donnée, continue de x .

La solution générale se présentera aussi sous la forme $y_g = y_{essm} + y_p$ où y_{essm} est la solution générale de l'équation homogène (ESSM) et y_p est une solution particulière de l'équation complète (EASM).

a) Solution générale de l'équation sans second membre

L'équation sans second membre (ESSM) est :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (ESSM)$$

Nous sommes besoin de chercher une fonction $y = y(x)$ telle que la combinaison linéaire avec ses dérivées y' et y'' soit nulle, c'est-à-dire $ay'' + by' + cy = 0$. Une seule fonction répond à ces demandes : la fonction exponentielle.

On cherchera, donc, des solutions de la forme $y = e^{rx}$ où r est une constante à déterminer, les dérivées sont : $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$ et en remplaçant dans (ESSM) on obtient :

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (5.29)$$

Cette équation est appelée **L'équation caractéristique**, et la forme de la solution générale de l'équation différentielle linéaire sans second membre dépend des racines de l'équation caractéristique.

Trois cas sont possibles selon la valeur du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du trinôme (5.29) :

1. si $\Delta > 0$:

L'équation caractéristique admet deux racines réelles et distinctes r_1 et r_2 ;

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (5.30)$$

les fonctions $y_1 = e^{r_1x}$ et $y_2 = e^{r_2x}$ sont deux intégrales particulières de l'équation (ESSM) et la solution générale est une combinaison de ces deux solutions :

$$y_{essm} = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \quad (5.31)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

Exemple 5.23 Soit à résoudre l'équation différentielle : $y'' + y' - 2y = 0$
l'équation caractéristique associée est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, $\Delta = 1 - 4(-2) = 9 > 0$.
les racines sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$ alors

$$y_{essm} = C_1e^x + C_2e^{-2x}$$

2. si $\Delta < 0$:

L'équation caractéristique admet dans ce cas deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \alpha + j\beta \quad \text{et} \quad r_2 = \alpha - j\beta$$

on peut aussi proposer la solution sous la forme : $y_{essm} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes complexes : $C_1 = \lambda_1 + j\lambda_2$ et $C_2 = \lambda_1 - j\lambda_2$ le conjugué de C_1 . Alors :

$$\begin{aligned} y_{essm} &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = (\lambda_1 + j\lambda_2) e^{(\alpha + j\beta)x} + (\lambda_1 - j\lambda_2) e^{(\alpha - j\beta)x} \\ &= e^{\alpha x} [(\lambda_1 + j\lambda_2) e^{j\beta x} + (\lambda_1 - j\lambda_2) e^{-j\beta x}] \\ &= e^{\alpha x} [\lambda_1 (e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) + j\lambda_2 (e^{j\beta x} - e^{-j\beta x})] \\ &= e^{\alpha x} [2\lambda_1 \cos \beta x - 2\lambda_2 \sin \beta x] \end{aligned}$$

Soit, en posant $A = 2\lambda_1$ et $B = -2\lambda_2$:

$$y_{essm} = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (5.32)$$

En physique on posera

$$y_{essm} = Y e^{\alpha x} \cos(\beta x - \varphi) \quad (5.33)$$

tel que : $Y = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\varphi = \arctan(B/A)$

ä **Exemple 5.24** Considérons l'équation différentielle :

$$y'' - 8y' + 41y = 0$$

avec les conditions initiales : $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

L'équation caractéristique associée est : $\lambda^2 - 8\lambda + 41 = 0$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(1 \times 41) = -100 < 0 \quad \text{soit} \quad \Delta = 100j^2$$

$$\text{Les racines sont } \lambda_{1,2} = \frac{8 \pm 10j}{2} = 4 \pm 5j$$

La solution générale de l'équation différentielle est

$$y = e^{4x} (A \cos 5x + B \sin 5x)$$

ou bien

$$y = Y e^{4x} \cos(5x - \varphi)$$

On a $y(0) = A = 1$

$$y'(x) = (4 - 5A \sin 5x + 5B \cos 5x)$$

$$y'(0) = 4 + 5B = -1 \implies B = -1$$

La solution particulière est donc

$$y(x) = e^{4x} (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$Y = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{soit} :$$

$$y(x) = \sqrt{2} e^{4x} \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$$

3. si $\Delta = 0$:

L'équation caractéristique admet alors une racine double $r = -\frac{b}{2a}$ ce qui donne une solution particulière : $y = e^{rx}$.

On cherchera par suite une deuxième solution particulière, linéairement indépendante, on applique ensuite la méthode générale, c'est-à-dire qu'on pose $y = z(x) e^{rx}$ d'où :

$$y' = e^{rx} [rz + z'] \quad \text{et} \quad y'' = e^{rx} [r^2z + 2rz' + z'']$$

qu'on remplace dans l'ESSM.

On obtient :

$$a(r^2z + 2rz' + z'') + b(rz + z') + cz = 0$$

soit

$$az'' + (2ar + b)z' + (ar^2 + br + c)z = 0$$

r supposé racine double de l'équation caractéristique donc on a : $ar^2 + br + c = 0$ et $2ar + b = 0$ par suite $z'' = 0$, en intégrant, deux fois on trouve $z' = Ct^e = \lambda_1$ et $z(x) = \lambda_1x + \lambda_2$ et finalement :

$$y_{essm} = (\lambda_1x + \lambda_2) e^{rx} \quad (5.34)$$

ä **Exemple 5.25** Soit à intégrer l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 9y = 0$

on a $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \iff (\lambda - 3)^2 = 0$ donc $\lambda = 3$ est une racine double, la solution est :

$$y_{essm} = (ax + b) e^{3x}$$

b) Solution particulière de l'équation complète

La méthode de Lagrange est en général appliquée sauf dans les cas où le second membre se présente sous la forme

$$a(m^2Q + 2mQ' + Q'') e^{mx} + b(Q' + mQ) e^{mx} + cQe^{mx} = Pe^{mx}$$

on a $e^{mx} \neq 0 (\forall x)$ donc :

$$aQ'' + (2am + b)Q' + (am^2 + bm + c)Q = P$$

Le polynôme $Q(x)$ est de la forme $Q(x) = A_q x^q + A_{q-1} x^{q-1} + \dots + A_1 x + A_0$ dont il faut déterminer les coefficients $A_i, i = 0, 1, 2, \dots, q$.

Le degré q de Q dépend de m , trois cas se présentent :

i m n'est pas une racine de l'équation caractéristique c'est-à-dire : $am^2 + bm + c \neq 0$, par suite le premier membre est une fonction polynomiale de même degré que Q , alors $\deg Q = \deg P = n$ et $y_p = Q_n(x) e^{mx}$ et il faut trouver tous les coefficients $A_i; i = 0, 1, 2, \dots, n$

ii m est une racine simple de l'équation caractéristique, donc $am^2 + bm + c = 0$, mais $2am + b \neq 0$, le premier membre est une fonction polynomiale de même degré que Q' ; $\deg Q'(x) = \deg P = n$, alors $\deg Q(x) = n + 1$.

Dans ce cas on ne cherchera pas les coefficients A_0 car $y_{essm} = Ce^{rx} = Ce^{mx}$.

iii m est une racine double de l'équation caractéristique, alors : $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b = 0$. Le premier membre est une fonction polynomiale de même degré que $Q''(x)$: $\deg Q'' = \deg P$ ou bien $\deg Q = n + 2$, on ne cherchera pas les coefficients A_0 et A_1 car $y_{essm} = (C_1x + C_2)e^{rx} = (C_1x + C_2)e^{mx}$.

Considérons d'autre part les deux cas particuliers :

1. **Le second membre est un polynôme : $f(x) = P_n(x)$**

La solution particulière sera un polynôme $Q(x)$:

- (a) de degré n si $c \neq 0$
- (b) de degré $n + 1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$
- (c) de degré $n + 2$ si $c = 0$ et $b = 0$

ä Exemple 5.26 :

(a) $y'' + 3y - y = x^2$ La solution est

$$y = C_1 \cos \sqrt{2}x - C_2 \sin \sqrt{2}x + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

(b) $y'' + 2y' = x^4$ La solution est

$$y = C_1 e^{-2x} - \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}$$

(c) $2y'' = x^2$, La solution est

$$y = C_1x + C_2 + \frac{1}{24}x^4$$

2. **Le second membre est de la forme : $f(x) = P_m(x) \sin kx + Q_n(x) \cos kx$**

On passe par les formules d'Euler

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{jkx} + e^{-jkx}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j} \end{aligned} \quad (5.36)$$

afin de revenir au cas précédent et le second membre devient :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_m(x) \sin kx + Q_n(x) \cos kx \\ &= P(x) \frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j} + Q(x) \frac{e^{jkx} + e^{-jkx}}{2} \\ &= \frac{1}{2}e^{jkx} \left[\frac{P}{j} + Q \right] + \frac{1}{2}e^{-jkx} \left[-\frac{P}{j} + Q \right] \\ &= \frac{1}{2}e^{ikx} (Q - jP) + \frac{1}{2}e^{-jkx} (Q + jP) \\ &= f_1(x) + f_2(x) \end{aligned}$$

avec $f_2(x) = \overline{f_1(x)}$.

ä **Exemple 5.27** Trouver la solution générale de l'équation :

$$y'' + 4y = x \cos 2x$$

L'équation sans second membre est $y'' + 4y = 0$, alors son équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$, ses racines sont $r = \pm 2j$ donc la solution générale de l'ESSM est

$$y_{essm} = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Le second membre de l'équation complète est :

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cos 2x = x \frac{e^{2jx} + e^{-2jx}}{2} \\ &= \frac{x}{2} e^{2jx} + \frac{x}{2} e^{-2jx} = f_1(x) + \overline{f_1(x)} \end{aligned}$$

Cherchons une solution particulière de : $y'' + 4y = \frac{x}{2} e^{2jx}$

Le second membre est de la forme $e^{mx} P(x)$, où $\deg P = 1$ et $m = 2j$ une racine simple de l'équation caractéristique, d'où la forme de l'intégrale particulière : $y_p = Q_2(x) e^{2jx}$

$$\begin{aligned} y_p &= (ax^2 + bx) e^{2jx} \\ y_p' &= 2j(ax^2 + bx) e^{2jx} + (2ax + b) e^{jx} = (2jax^2 + 2(a + jb)x + b) e^{2jx} \\ y_p'' &= (8jax + 2a + 4jb - 4ax^2 - 4bx) e^{jx} \end{aligned}$$

Portant dans l'équation différentielle on obtient :

$$\begin{aligned} 8jax + 2a + 4jb - 4ax^2 - 4bx + 4(ax^2 + bx) &= \frac{x}{2} \\ \Leftrightarrow 2j(4ax - ja + 2b) &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8ja = \frac{1}{2} \\ 2a + 4jb = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{16j} \text{ et } b = \frac{-2a}{4j} = -\frac{1}{2j} \frac{1}{16j} = \frac{1}{32}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } y_{p1} &= \frac{1}{32} (-2jx^2 + x) e^{2jx} \\ &= \frac{1}{32} (\cos 2x) x + \frac{1}{16} (\sin 2x) x^2 + j \left(-\frac{1}{16} x^2 \cos 2x + \frac{1}{32} x \sin 2x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{p2} = \overline{y_{p1}} &= \frac{1}{32} (2jx^2 + x) e^{-2jx} \\ &= \frac{1}{32} (\cos 2x) x + \frac{1}{16} (\sin 2x) x^2 + j \left(\frac{1}{16} x^2 \cos 2x - \frac{1}{32} x \sin 2x \right) \end{aligned}$$

et

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = \frac{1}{16} (x \cos 2x + 2x^2 \sin 2x)$$

Notons que la solution générale de ESSM est

$$y_{essm} = A \cos 2x + B \sin 2x$$

et finalement la solution générale de l'équation avec second membre est :

$$y = \left(A + \frac{x}{32} \right) \cos 2x + \left(B + \frac{x^2}{16} \right) \sin 2x$$

Cas où Le second membre est quelconque

La méthode de variation des constantes de Lagrange, déjà rencontrée dans le cas du premier ordre, permet de trouver une solution de l'équation avec second membre lorsqu'on connaît deux solutions linéairement indépendantes.

à **Exemple 5.28** Intégrer l'équation différentielle : $y'' - y = \frac{1}{\cosh^3 x}$

L'équation sans second membre associée, $y'' - y = 0$, admet pour solutions e^x et e^{-x} , solutions linéairement indépendantes. Posons $y = Ae^{-x} + Be^x$

$$\text{on a } f(x) = \frac{1}{\cosh^3 x} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^{-3} = \frac{8}{(e^x + e^{-x})^3}$$

En utilisant la méthode de Lagrange, on trouve le système :

$$\begin{aligned} A'e^x + B'e^{-x} &= 0 \\ A'e^x - B'e^{-x} &= \frac{8}{(e^x + e^{-x})^3} \end{aligned}$$

dont la solution est

$$\begin{aligned} A' &= \frac{4e^{-4x}}{(e^{-2x} + 1)^3} \\ B' &= -4 \frac{e^{-2x}}{(e^{-2x} + 1)^3} \end{aligned}$$

Alors en intégrant :

$$\begin{aligned} A &= 4 \int \frac{e^{-4x}}{(e^{-2x} + 1)^3} dx = -\frac{1}{(e^{2x} + 1)^2} \\ B &= -4 \int \frac{e^{-2x}}{(e^{-2x} + 1)^3} dx = \frac{2e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 1)^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$y_p = -\frac{e^x}{(e^{2x} + 1)^2} + \frac{2e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 1)^2} e^{-x} = \frac{e^{-3x}}{e^{-2x} + 1}$$

La solution de l'équation complète est

$$y = Ae^{-x} + Be^x + \frac{e^{-3x}}{e^{-2x} + 1}$$

5.3 Applications

Les équations différentielles trouvent beaucoup des applications en physique, électronique, mécanique, sciences économiques, sociales etc.

Dans la suite on va donner quelques applications physiques sur les équations différentielles du premier et du second ordre avec des exemples numériques.

5.3.1 Variation de température

En portant un objet chaud de température T_1 dans un milieu froid de température T_0 telles que $T_0 < T_1$, l'objet commence à se refroidir, après certain temps la température final de l'objet devient T_0 .

La loi de refroidissement de Newton indique que le taux de perte de température d'un corps est proportionnel à la différence entre les températures du corps T et celle du milieu T_0

Soit $T(t)$ la température de l'objet à l'instant t , la loi de Newton de variation de $T(t)$ est exprimée par une équation différentielle linéaire du premier ordre.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0) \quad (5.37)$$

où k est une constante dépendant du matériau de l'objet, T_0 la température ambiante supposée constante.

La loi $T(t)$ de température est la solution de l'équation différentielle (37).

Séparons les variables, l'équation devient :

$$\frac{dT}{T - T_0} = k dt$$

en intégrant les deux membres

$$\int \frac{dT}{T - T_0} = \int k dt \quad (5.38)$$

on trouve

$$\ln |T - T_0| = kt + C \quad (5.39)$$

ou finalement

$$T(t) = Ae^{kt} + T_0$$

avec $A = e^C$

à Exemple 5.29 La température d'une tasse de café juste préparée est 180°F , en portant dans une chambre de température ambiante 70°F , la tasse se refroidir et après 2 minutes sa température devient 165°F .

1. Trouver la température du café à un instant quelconque t .
2. Déterminer l'instant t , telle la température devient 120°F .

Solution :

1. La loi de Newton s'écrit

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70)$$

la solution est

$$T(t) = Ae^{kt} + T_0 = Ae^{kt} + 70$$

A l'instant initiale $t = 0$ on a $180 = Ae^0 + 70$ donc $A = 110$ par suite

$$T(t) = 110e^{kt} + 70$$

on a $T = 165^\circ\text{F}$ à $t = 2$ min, ce qui nous permet de trouver la constante k .

$$165 = 110e^{2k} + 70 \iff e^{2k} = \frac{165 - 70}{110} = \frac{19}{22}$$

$$\implies k = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{19}{22} \right) = -0.07330173$$

la loi $T(t)$ s'écrit donc

$$T(t) = 110e^{-0.073t} + 70$$

2. La solution générale $T(t) = Ae^{kt} + T_0$ nous permet de trouver t en fonction de T , T_0 , A et k on a alors

$$t = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{T - T_0}{A} \right) = \frac{-1}{0.0733} \ln \left(\frac{T - 70}{110} \right)$$

Pour $T = 120^\circ\text{F}$:

$$t = \frac{1}{-0.0733} \ln \left(\frac{120 - 70}{110} \right) = 10.756581 \text{ min.}$$

5.3.2 Circuit R,L

Un circuit **RL** est un circuit électrique contenant une résistance (R) et une bobine, d'inductance L , en série, sur lequel on applique une f.e.m $V = V(t)$, Cherchons l'intensité $i(t)$ du courant qui traverse le circuit.

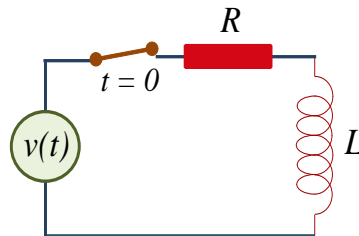


FIG. 5.2 – circuit R, L

Le circuit est régi par l'équation différentielle

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V(t) \quad (5.40)$$

où $L \frac{di}{dt}$ est la tension au borne de la bobine et Ri est celle au borne de la résistance R . on donc une équation différentielle linéaire du premier ordre.

L'ESSM : $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$

En séparant les variables, on trouve :

$$L \frac{di}{i} = -Rdt$$

et l'intensité se détermine par intégration :

$$L \int \frac{di}{i} = -R \int dt$$

donc :

$$L \ln |i| = -Rt + C$$

où C est une constante arbitraire. Finalement on trouve

$$i(t) = k \exp \left(-\frac{Rt}{L} \right)$$

avec $k = \exp\left(\frac{C}{L}\right)$

Pour trouver une solution particulière de l'EASM on suppose que $k = k(t)$.

$$\frac{di}{dt} = k'e^{-Rt/L} - k\frac{R}{L}e^{-Rt/L}$$

substituant dans l'équation complète

$$L\left(k'e^{-Rt/L} - k\frac{R}{L}e^{-Rt/L}\right) + Rke^{-Rt/L} = V(t)$$

ce qui nous donne

$$Lk'e^{-Rt/L} = V(t)$$

ou bien

$$k' = \frac{V(t)}{L} \exp\left(\frac{Rt}{L}\right)$$

par suit

$$k(t) = \frac{1}{L} \int V(t) e^{Rt/L} dt$$

à **Exemple 5.30** Calculer l'intensité du courant électrique qui traverse un circuit (R, L) , soumis à une f.é.m $V = 12$ V, sachant que $i(0) = 0$. On donne : $R = 600 \Omega$ et $L = 6$ H.

Solution :

L'équation différentielle du circuit est :

$$6\frac{di}{dt} + 600i = 12 \text{ ou aussi } \frac{di}{dt} + 100i - 2 = 0$$

Posons $I = 100i - 2 \implies \frac{dI}{dt} = 100\frac{di}{dt}$ et on obtient : $\frac{1}{100}\frac{dI}{dt} + I = 0$

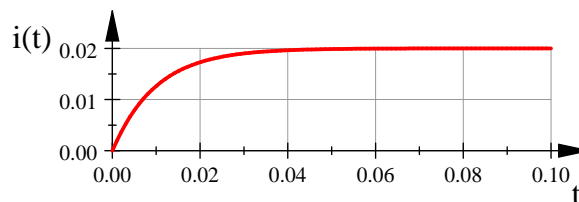
$\frac{dI}{I} = -100dt \implies \ln|I| = -100t + C$ et $I = ke^{-100t}$, remplaçons I par sa valeur :
 $100i - 2 = ke^{-100t}$ et donc :

$$i(t) = \frac{k}{100}e^{-100t} + \frac{2}{100}$$

la condition initiale $i(0) = 0$ nous permet de calculer k :

$i(0) = \frac{k}{100} + \frac{2}{100} = 0$ donc $k = -2$ et la solution finale s'écrit

$$i(t) = -\frac{1}{50}e^{-100t} + \frac{1}{50}$$



5.3.3 Oscillateurs

Une oscillation est un mouvement ou une fluctuation périodique. Les oscillations sont soit à amplitude constante soit amorties. Elles répondent aux mêmes équations quel que soit le domaine, généralement c'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constantes

En mécanique : Une oscillation est un mouvement répétitif d'une pièce mobile autour d'un point fixe d'équilibre (pendule, ressort, ...)

En électricité : L'oscillation dans un circuit électrique peut être voulue, comme dans le cas des oscillateurs, ou être due à un défaut. Elle consiste en une variation cyclique de l'intensité du courant électrique dans ce circuit.

Un oscillateur est un système manifestant une variation périodique dans le temps.

Un oscillateur libre est un système subissant une force qui a tendance à le ramener vers une position d'équilibre autour duquel il oscille. C'est le cas d'un pendule oscillant sous l'effet de la gravité.

Un oscillateur forcé est un oscillateur libre auquel on ajoute une force oscillante. Une balançoire en est un lorsqu'on balance ses pieds afin de la faire accélérer.

a) Système ressort-masse

Considérons une masse M accrochée à ressort de raideur k (Fig. 3) capable de se déplacer librement suivant une direction verticale. Si, à un instant initial ($t = 0$), on donne à la masse M une force instantanée vers le bas, le ressort s'allonge d'une quantité x et il produit une force de rappel $F_R = -kx$ et la masse commence à osciller autour de sa position d'équilibre.

En négligeant les forces de frottement, d'après le principe fondamental de la dynamique, on écrit

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (5.41)$$

c'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constantes.

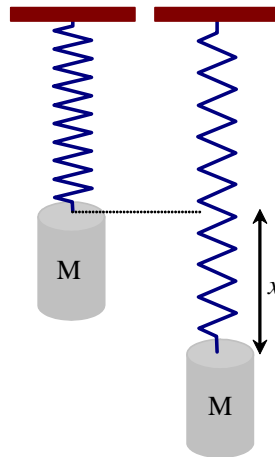


FIG. 5.3 – ressort - masse

Cette équation s'écrit aussi :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (5.42)$$

où $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

L'équation caractéristique est donc : $r^2 + \omega^2 = 0$ dont les racines sont $r_{1,2} = \pm j\omega$ et alors la solution est

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (5.43)$$

avec A et B sont deux constantes arbitraires ou bien on peut mettre la solution sous la forme

$$x(t) = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (5.44)$$

où $a = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\varphi = \arctan(B/A)$.

Les constantes A et B , et par suite a et φ , se déterminent d'après des conditions initiales.

Par exemple si on a les conditions $x(0) = 1$ et $x'(0) = \sqrt{3}\omega$ on trouve $A = 1$ et $B = \sqrt{3}$ ou $a = 2$ et $\varphi = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos \omega t + \sqrt{3} \sin \omega t \\ x(t) &= 2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

b) Circuit R,L,C

Le circuit électrique constitué d'une résistance R , d'une induction L , et d'un condensateur de capacité C , en série soumis à tension $V(t)$ à l'aide d'un générateur de tension $V(t)$.

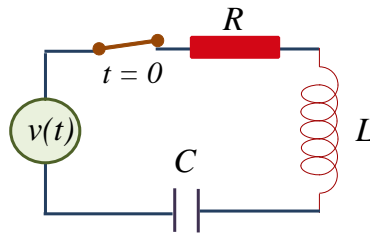


FIG. 5.4 – Circuit RLC

Relativement à la charge instantanée $q(t)$ condensateur, l'équation différentielle du circuit est :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V$$

On écrit l'ESSM sous la forme :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

ou bien :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq}{dt} + \omega^2 q = 0$$

avec $\alpha = \frac{R}{2L}$ et $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

L'équation caractéristique associée :

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2 = 0$$

admet deux racines :

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

donc l'équation différentielle admet deux solutions particulières $q_{1,2} = \exp(\lambda_{1,2}t)$ et la solution générale est :

$$q(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t)$$

Sélon les valeurs de α et ω , les racines $\lambda_{1,2}$ peuvent des réelles ou complexes.

La solution particulière de l'équation complète se détermine selon la forme de V .

5.4 Exercices

Exercice 5.1 Montrer que les fonctions ci-dessous dépendant de constantes arbitraires satisfont aux équations différentielles en regard :

Fonction	Equation
$\sin x - 1 + ce^{-\sin x}$	$y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$
$cx + c + c^2$	$y'^2 - (1+x)y' + y = 0$
$\frac{C_1}{x} + C_2$	$y'' + \frac{2}{x}y' = 0$

Exercice 5.2 Intégrer les équations différentielles à variables séparables

- | | |
|--|--|
| 1. $ydx - xdy = 0$ | 7. $xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y, (x > 0)$ |
| 2. $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$ | 8. $y'y = xe^{x^2-y^2}$ |
| 3. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$ | 9. $-xy'y^2 + (1-x^2) = 0$ |
| 4. $dy + y \tan x dx = 0$ | 10. $y' = \frac{1+3x^2}{3y^2-6y}$ |
| 5. $\sin y \cos x dx + \cos y \sin x dy = 0$ | |
| 6. $y' = (1+y^2)e^x$ | |

Exercice 5.3 On considère un récipient cylindrique de hauteur h et de rayon de base R contenant un liquide non visqueux, le récipient est percé en bas par un petit trou circulaire rayon r . Suivant la loi de Torricelli l'écoulement du liquide est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{dV}{dt} + kA\sqrt{y} = 0 \quad (E_1)$$

Où à l'instant t : $V = V(t)$ est le volume de l'eau dans le récipient, $y = y(t)$ est sa hauteur, A est la section du trou et k une constante positive. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le récipient était plein ($y(0) = h$).

1. Montrer que l'équation (E_1) s'écrit, sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} = -k\alpha^2\sqrt{y} \quad (E_2)$$

où $\alpha = \frac{r}{R}$.

2. En intégrant l'équation (E_2) , déterminer la variation de hauteur du liquide $y(t)$.
3. A quelle instant le récipient devient vide ?

Applications numériques :

$$h = 250 \text{ cm} \quad R = 40 \text{ cm} \quad r = 1 \text{ cm} \quad k = 26 \text{ cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice 5.4 A l'instant $t = 0$ on lance, vers le haut, un objet de masse m avec une vitesse initiale v_0 .

Durant son mouvement l'objet est soumis à son poids $p = mg$ et à la résistance de l'air $R = kv^2$ où g est l'accélération du pesanteur et k est une constante positive.

D'après la deuxième loi de Newton le mouvement est décrit par l'équation différentielle :

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv^2 \quad (E)$$

1. Déterminer la loi de vitesse $v = v(t)$.
2. Applications numériques :

$$m = 0.2 \text{ kg} \quad k = 4 \times 10^{-6} \text{ kg/m} \quad g = 10 \text{ m/s}^2 \quad v_0 = 28 \text{ m/s}$$

Exercice 5.5 Intégrer les équations homogènes

1. $(y - x) dx + (y + x) dy$
2. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $xy^2y' = x^3 + y^3$

Exercice 5.6 Intégrer les équations différentielles linéaires

- | | |
|-------------------------------|------------------------------------|
| 1. $y' + y = e^x$ | 4. $y' - \frac{2y}{1+x} = (1+x)^3$ |
| 2. $y' \cos x + y \sin x = 1$ | 5. $y' - \frac{n}{x}y = x^n e^x$ |
| 3. $xy' + ny = ax^n$ | 6. $xy' = ay + x + 1$ |

Exercice 5.7 Une boule de glace G de masse variable $M = M(t)$, tombe en chute suivant la verticale Oz . Par suite de la fusion, la masse de boule varie suivant la loi $M(t) = m - at$, où m est la masse initiale et a est une constante positive. On suppose que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse de l'objet : $f = kv$, où $v = \frac{dz}{dt}$

La deuxième loi de Newton s'écrit suivant l'axe Oz :

$$\frac{d(Mv)}{dt} = Mg - f$$

1. On admet $k = 3a$. Montrer que la vitesse de G vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{2a}{m - at}v = g \quad (E)$$

2. Résoudre l'équation (E), et déterminer la loi générale de la vitesse $v = v(t)$.
3. Déterminer la solution particulière telle que $v(0) = v_0 = 0$.
4. Déduire l'expression de l'élongation $z = z(t)$ telle que $z(0) = 0$.
5. Déterminer l'instant $t = t_1$ où la masse devient la moitié de la masse initiale, calculer à cet instant la vitesse et la distance parcourue
6. Déterminer l'instant $t = t_2$ où la fusion est complète ($M = 0$), calculer à cet instant la vitesse et la distance parcourue.

Exercice 5.8 Intégrer les équations de Bernoulli

1. $-y' (1 - x^2) - xy - xy^2 = 0$
2. $3y^2y' - ay^3 - x - 1 = 0$

Exercice 5.9 On donne l'équation différentielle

$$xy' + y = (xy)^{3/2} \quad (E)$$

1. En utilisant un changement de variable convenable, transformer cette équation en une équation différentielle linéaire que l'on va noter (F)
2. Résoudre l'équation (F) et déduire la solution générale de (E)

Exercice 5.10 Intégrer les équations différentielles du deuxième ordre

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $(1 - x^2) y'' - xy' = 0$ 2. $y'' - 4y = 0$ 3. $y'' + 6y' + 20y = 0$ 4. $y'' + 3y' - 4y = 0$ 5. $y'' - 4y' + 2y = 4$ 6. $y'' - 2y' + y = e^x$ 7. $y'' + y = \cos 3x$ | <ol style="list-style-type: none"> 8. $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1$ 9. $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$ 10. $y'' + 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$ 11. $y'' - y' - 2y = e^{2x}$ 12. $y'' - 2y' + (1 + m^2) y = (1 + 4m^2) \cos mx$ 13. $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$ 14. $y'' - 3y' + 2y = (1 - 2x) e^x$ |
|--|--|

Exercice 5.11 Considérons l'équation différentielle :

$$y'' \cos x + y' \sin x = y \cos^3 x \quad (E1)$$

En posant $t = \sin x$, ramener l'équation (E1) à une équation à coefficients constants et l'intégrer.

Exercice 5.12 Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel ; $n \neq 1$.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = ay + by^n \quad (E)$$

On se propose dans cet exercice de rechercher les solutions strictement positifs de (E) dans \mathbb{R} .

1. On pose sur \mathbb{R} : $z = y^{1-n}$. Déterminer une équation différentielle satisfaite par z et la résoudre
2. En déduire les solutions strictement positifs de (E) sur \mathbb{R}
3. Que donne le cas $n = 0$?

Exercice 5.13 La température instantanée $\theta(t)$ d'un objet vérifie la loi de Newton

$$\frac{d\theta}{dt} = k(T - \theta) \quad (E)$$

où T est la température ambiante et k une constante. Le temps t est exprimé en minutes

1. Résoudre l'équation (E) pour déterminer la température instantanée $\theta(t)$. Sachant qu'un objet à la température initiale $\theta_0 = 70^\circ\text{C}$ est placé dans une salle où la température ambiante est $T = 20^\circ\text{C}$, déterminer une solution particulière.
2. Exprimer la constante k en fonction de θ et t .
3. Calculer la valeur numérique de la constante k sachant que la température de l'objet devient 50°C après 2 min.
4. A quel instant la température devient 25°C .

Exercice 5.14 On considère un circuit R, L auquel on applique une f.e.m $e(t)$; pour $t > 0$

1. Ecrire l'équation différentielle (D) qui régit le circuit
2. Déterminer l'intensité du courant $i(t)$ vérifiant l'équation (D) si $e(t) = 2$
3. Résoudre l'équation (D) dans le cas où $e(t) = a \sin \omega t$ où a et ω sont constantes

Exercice 5.15 On considère l'équation différentielle

$$2xy' + y = 3x + 1 \quad (E_1)$$

1. Déterminer une solution particulière de (E_1) de la forme $y_1(x) = ax + b$.
2. Donner la solution générale de l'équation homogène :

$$2xy' + y = 0 \quad (H)$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

3. Dédire de ce qui précède la solution générale de l'équation (E_1) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

Exercice 5.16 Le mouvement d'une masse ponctuelle m sous l'action d'une force F est définie par l'équation différentielle

$$mx'' + kx' + \beta x = F \quad (E2)$$

1. Déterminer l'expression générale de l'élongation $x = x(t)$ si $F = \text{constante}$
2. Pour le mouvement harmonique $k = 0$. Résoudre (E2) avec $F = m \sin t$.
3. Résoudre (E2) si $m = 1, \beta = 2$ et $k = 2$ et $F = m \sin t$

Exercice 5.17 Un objet de masse m , initialement au repos, tombe en chute dont la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse de l'objet. Si $x(t)$ est la distance traversée, alors sa vitesse est

$v = x'(t)$ et $a = v'(t)$ son accélération. Si on désigne par g l'accélération de pesanteur alors l'objet est soumis à la force : $mg - kv$, où k est une constante positive. La deuxième loi de Newton nous donne alors

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

1. Résoudre cet équation et montrer que $v = \frac{mg}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right) \right)$
2. Quelle est la vitesse limite de l'objet
3. Trouver la distance traversée après t secondes

Exercice 5.18 Le mouvement oscillatoire du point M mobile sur l'axe $x'Ox$, sous l'action d'une force $F(t)$ est définie par l'équation différentielle :

$$x'' + 2ax' + (a - 2)^2 x = F(t)$$

où $x = x(t)$ et $x' = v(t)$ la vitesse et a est un paramètre ; $a \geq 0$.

1. Etudier le mouvement si $F(t) = 0$ dans les deux cas suivants
 - (a) $a = 0, x(0) = 1$ et $v(0) = 2\sqrt{3}$.
 - (b) Trouver l'amplitude et la période.
 - (c) $\alpha = x(0) = v(0) = 1$
2. Quelle est la solution si $a = 1$ et $F(t) = e^{-2t}$

Exercice 5.19 On considère l'équation différentielle du second ordre (E) suivante :

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 \ln x \quad x > 0 \quad (E)$$

où $y = y(x)$

1. On pose $x = e^t$.
 - (a) Exprimer $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ et puis $y''(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$ en fonction de $x, y'(x)$ et de $x, y''(x)$, et $y''(x)$ respectivement.
 - (b) Montrer que (E) est équivalente à l'équation.

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y = te^{2t} \quad (F)$$

2. Donner la solution générale de l'équation (F).
3. Dédurre la solution particulière de (E) dont la courbe intégrale passe par le point $(1, 0)$ et telle que $y'(1) = 1$.

Chapitre 6

Suites et Séries numériques

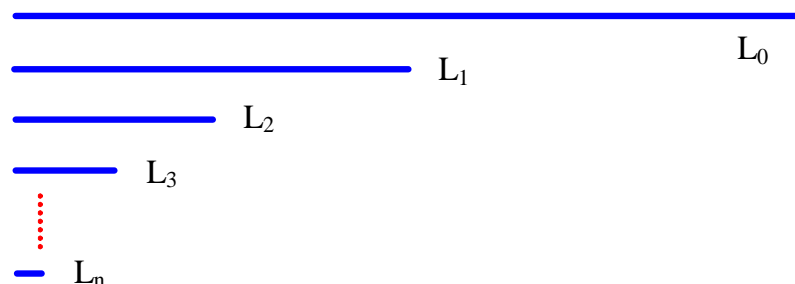
Notre vie quotidienne est fortement basée sur la transmission de l'information. On demande une grande quantité d'information, à grande vitesse de transmission et de très bonne qualité, etc. En considérant tous ces demandes les physiciens ont invités le développement de domaines scientifiques et techniques conve- nables : Le traitement numérique du signal. Les signaux qui représentent les informations, en première approximation, sont transformés en une **suite** des signaux élémentaires et leur somme constitue une **série** des signaux.

Bien que les notions de suite et de série sont très anciennes mais elles trouvent des bonnes applications comme modèles mathématiques dans notre technique moderne et en particu- lier la série de Fourier.

L'objectif du présent chapitre est de définir les séries et ses propriétés et d'étudier en particuliers, mais en bref deux types de séries : Série de Taylor et série de Fourier

6.1 Suite numérique

Considérons une tige de longueur L_0 , et la découpons en deux parties égales, la longueur de chaque partie est donc $L_0/2$. Si on découpe une partie en deux les longueurs seront $L_0/4$, En continuant à découper une partie en deux on obtient donc les longueurs $L_0, L_1 = L_0/2, L_2 = L_0/4 = L_0/2^2, \dots, L_n = L_0/2^n$. L'ensemble des longueurs obtenues (L_n) est une *suite*.



On appelle suite tout ensemble ordonné des objets. En mathématiques ces objets peuvent être des nombres on a alors une **suite numérique**, s'il s'agit des fonctions la suite est une suite des fonctions.

Définition 6.1 On appelle suite numérique, toute application qui fait associer à un entier naturel n un nombre réel $a_n = a(n)$, d'une façon qu'à chaque valeur de n on peut calculer la valeur correspondante de a_n .

La suite numérique est une fonction de l'entier naturel n dont le domaine de définition est l'ensemble des entiers naturels tels que $n \geq n_0$, où n_0 est un entier donné.

Les nombres $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont les termes de la suite. On distingue le premier terme et $a_n = a(n)$ est le terme général de la suite

ä Exemple 6.1 :

$$a_n = \frac{1}{2^n}, \text{ on a } n \in \mathbb{N}.$$

$$a_0 = 1 \text{ est le premier terme, } a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, \dots$$

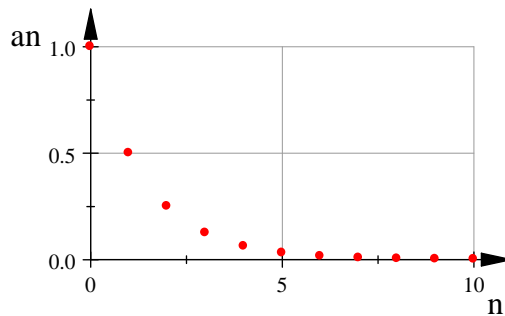
$$b_n = \frac{n}{n-1} : n \in \{2, 3, 4, \dots\}$$

$$b_2 = 2 \text{ est le premier terme, } b_3 = \frac{3}{2}, b_4 = \frac{4}{3}$$

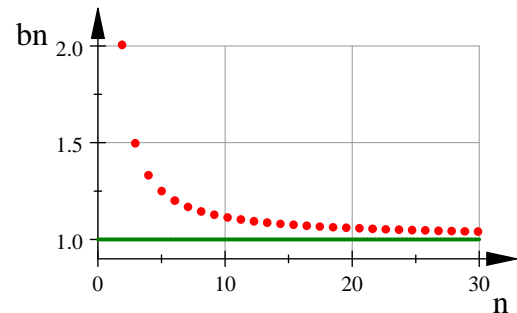
$$u_n = \frac{(-1)^n (n-1)}{n} : n \in \mathbb{N}^*$$

$$u_1 = 0, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = -\frac{2}{3}, u_4 = \frac{3}{4} \dots$$

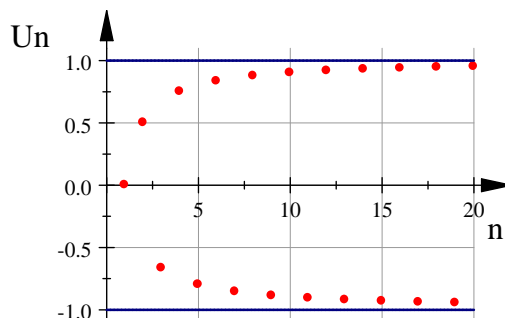
$$v_n = n : v_0 = 0, v_1 = 1, v_2 = 2, \dots$$



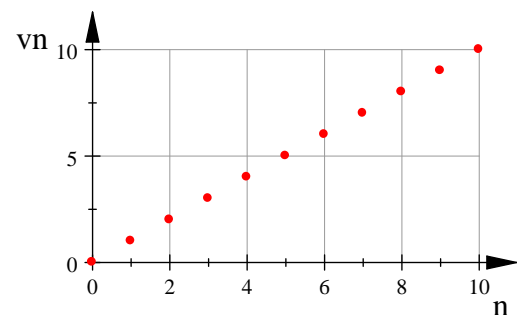
$$a_n = \frac{1}{2^n}$$



$$b_n = \frac{n}{n-1}$$



$$u_n = \frac{(-1)^n (n-1)}{n}$$



$$v_n = n$$

6.1.1 Limite d'une suite. Convergence et divergence

En étudiant une suite numérique, une question évidente mais importante se pose : que se passe-t-il si on augmente la valeur de n indéfiniment ? En fait, c'est une question de limite. On distingue deux cas :

- Si la limite à l'infini est une valeur finie, on dit que la suite est **convergente**.

– Autrement la suite est dite **divergente**.

Dans l'exemple précédent on remarque que les termes de la suite a_n se rapprochent de zéro en augmentant n . La suite b_n est plus proche de 1 autant que n est grand

Ces deux suites sont dites convergentes

Les termes de la suite u_n oscillent entre $+1$ et -1 . Les valeurs de la suite v_n augmente avec n , alors u_n et v_n divergent

Définition 6.2 On appelle limite d'une suite numérique a_n , le réel A tel que : quelque soit le nombre infiniment petit donné ε , il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ on a $|a_n - A| < \varepsilon$, on note :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n > N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon \quad (6.1)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ ou } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \quad (6.2)$$

L'inégalité $|a_n - A| < \varepsilon$ s'écrit : $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, ce qui implique, que pour n grand, a_n est dans le voisinage de A , et il existe un nombre entier N tel que tous les termes a_n qui ont $n > N$ se trouvent dans l'intervalle $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$, alors seul un nombre fini de termes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ peut être à l'extérieur de l'intervalle. Par suite, on aura une suite stationnaire dont les termes sont toutes égales à A et la limite est égale à A .

ä **Exemple 6.2 :**

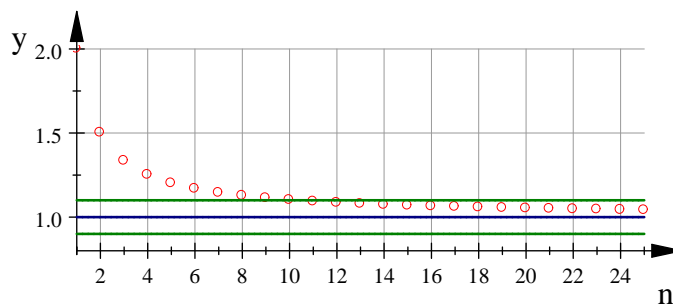
Considérons la suite $a_n = \frac{n+1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ c'est une suite convergente de limite } A = 1$$

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| 1 + \frac{1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > N = \frac{1}{\varepsilon}$$

En générale N dépend de ε .

Sur le graphe suivant, on a pour $N = 10 : \varepsilon = 0.1$, et tous les termes de la suite a_n tels que $n > 10$ se trouve entre les droites $y = 1.1$ et $y = 1$.

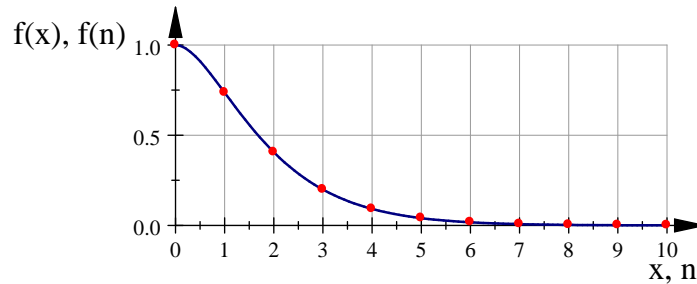


○ Pour trouver la limite d'une suite il faut travailler comme dans le calcul de la limite d'une fonction à une variable réelle, mais fait attention que la variable dans ce cas est un entier naturel.

Théorème 6.1 Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ alors il en est de même $f(n) : \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$

ä **Exemple 6.3 :**

Soit $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ et $a_n = \frac{n+1}{e^n} = f(n)$



on a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$. Appliquons la règle d'Hospital :

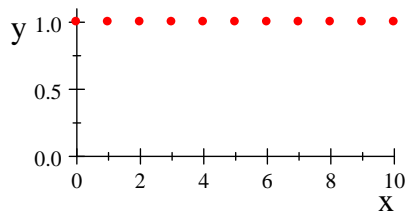
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{e^n} = 0$

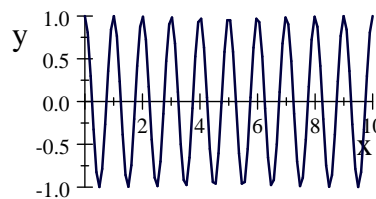
Remarque 6.1

La réciproque du théorème précédent est fausse.

ä **Exemple 6.4** Considérons la suite $a_n = f(n) = \cos(2\pi n)$ puisque n est un entier naturel alors $\cos(2\pi n) = 1 \forall n$. donc c'est une suite convergente dont la limite est 1



graphe de $\cos(2n\pi)$



graphe de $\cos(2\pi x)$

La fonction $f(x) = \cos(2\pi x)$ fait des oscillations entre les valeurs (-1) et $(+1)$ sa limite n'existe pas.

Théorème 6.2 Si a_n est une suite convergente de limite L et $f(x)$ une fonction continue au point $x = L$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(L)$

ä **Exemple 6.5** Soit la suite $a_n = \frac{1}{n}$, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

et soit $f(x) = 2^x$, c'est une fonction continue au point $x = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{1/n}) = 2^0 = f(0) = 1.$$

a) Théorèmes généraux sur la limite

Théorème 6.3 La condition nécessaire et suffisante de convergence d'une suite a_n c'est que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tout $n > N$ et tout $m > N$ on a $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Toute suite qui satisfait cette condition est dite suite de Cauchy.

Théorème 6.4 (Unicité de la limite) La limite d'une suite convergente est **unique**, c'est-à-dire une suite numérique convergente ne peut avoir deux limites distinctes.

Démonstration :

Soit a_n une suite numérique convergente et A la limite de a_n , donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Si a_n a une autre limite B alors on a aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$ par suite :

$$A - B = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_n) = 0 \implies A = B \quad (6.3)$$

Théorème 6.5 Si a_n et b_n sont deux suites convergentes et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \neq 0$ et si α et β sont deux nombres constants finis, alors :

1. La suite $[\alpha a_n + \beta b_n]$ est une suite convergente et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha A + \beta B \quad (6.4)$$

En particulier

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A - B \end{aligned} \quad (6.5)$$

2. La suite $[a_n \times b_n]$ est convergente et

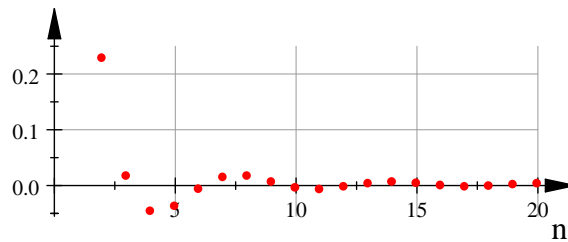
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \times b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \times \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = A \times B \quad (6.6)$$

3. La suite $\left[\frac{a_n}{b_n} \right]$ est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B} \quad (6.7)$$

Théorème 6.6 Si $[a_n]_{n=n_0}^{\infty}$ et $[b_n]_{n=n_0}^{\infty}$ sont deux suites convergentes vers la même limite L . S'il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$: $a_n \leq c_n \leq b_n$ alors la suite $[c_n]_{n=n_0}^{\infty}$ est aussi convergente vers L .

à **Exemple 6.6** Considérons la suite $c_n = \frac{\sin n}{n^2}$, elle est définie pour $n \geq 1$: $\left[\frac{\sin n}{n^2} \right]_{n=1}^{\infty}$.



Graph de $\frac{\sin n}{n^2}$

Le graphe de cette suite montre qu'elle est convergente et sa limite est $L = 0$. Mais on ne peut pas calculer la limite de cette suite par les méthodes déjà notées.

On a : $-1 \leq \sin n \leq +1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Divisons par n^2 , on trouve : $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq +\frac{1}{n^2}$

Remarquons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^2} = 0$

6.1.2 Définition par récurrence

Une suite numérique peut aussi être définie par une relation entre des termes successifs, connaissant le premier terme (ou parfois quelques premiers termes). Cette relation de récurrence nous permet de calculer un terme de la suite à partir des termes précédents par exemple :

$$a_{n+1} = a_n + 6; a_0 = 0$$

$$a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}; a_1 = 1 \text{ et } k > 0$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{\alpha}{a_n} \right), a_1 > 0$$

Notons que le calcul de la limite n'est pas toujours évident

$$- a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}; a_1 = 1 \text{ et } k > 0$$

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell > 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \ell$$

$$\text{soit } \ell = \sqrt{k + \ell} \implies \ell^2 = k + \ell$$

$$\text{on aura : } \ell^2 - \ell - k = 0$$

$$\text{Le discriminant } \Delta = \sqrt{1 + 4k} \implies \ell = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}$$

$$\text{Si } k = 12 \text{ on a } \ell = 4$$

$$- a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{\alpha}{a_n} \right), a_1 > 0, \alpha > 0$$

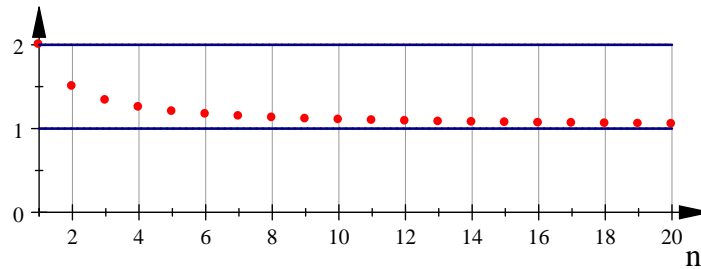
$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L > 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$$

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{\alpha}{L} \right) = \frac{L^2 + \alpha}{2L} \implies 2L^2 = L^2 + \alpha \implies L = \sqrt{\alpha}$$

6.1.3 Suites bornées

- Une suite numérique est dite majorée s'il existe un nombre fini M tel que $\forall n : a_n \leq M$
- Une suite numérique est dite minorée s'il existe un nombre fini m tel que $\forall n a_n \geq m$
- Une suite numérique est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée c'est-à-dire $\forall n : m \leq a_n \leq M$.

Dans ce cas tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[m, M]$, par exemple les termes de la suite $\frac{n+1}{n}$ sont dans l'intervalle $[1, 2] \forall n$.



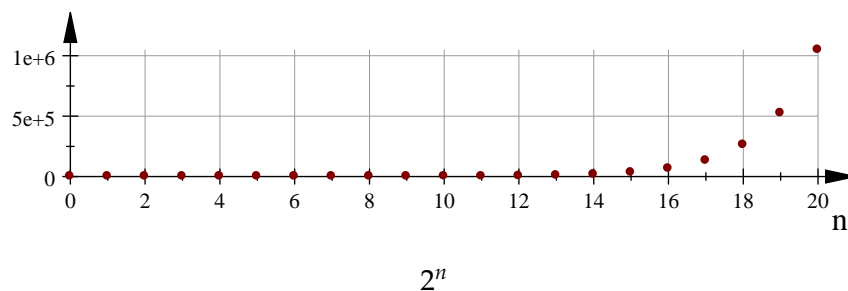
Parfois on utilise une autre définition de suite bornée : Une suite est dite bornée s'il existe un nombre K tel que $|a_n| \leq K$

$$\text{La suite } [a_n] \text{ est bornée} \iff \exists K > 0 ; \forall n, |a_n| \leq K \quad (6.8)$$

et pour la suite non bornée

$$\text{La suite } [a_n] \text{ est non bornée} \iff \forall K > 0 ; \exists n, |a_n| \geq K \quad (6.9)$$

à Exemple 6.7 La suite $[2^n]$ est non bornée. En effet pour tout $K > 0$, il existe n tel que $2^n > K$ c'est-à-dire $n > \log_2 K$.



Théorème 6.7 Toute suite convergente est une suite bornée.

Ce théorème implique pour qu'une suite soit convergente il est nécessaire, mais n'est pas suffisante, qu'elle soit bornée.

6.1.4 Suite monotone

Une suite $[a_n]$ est dite :

1. Croissante si $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1}$ c'est une suite minorée, si elle est de plus majorée elle sera donc bornée.

2. Décroissante si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1}$ c'est une suite majorée, si elle est de plus minorée elle sera donc bornée.
3. Monotone croissante si $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1}$.
4. Monotone décroissante si $a_1 > a_2 > a_3 \dots > a_n > a_{n+1}$.

Toute suite monotone et bornée a une limite.

ä **Exemple 6.8** La suite $\frac{1}{n^2}$ est monotone décroissante : $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \dots$

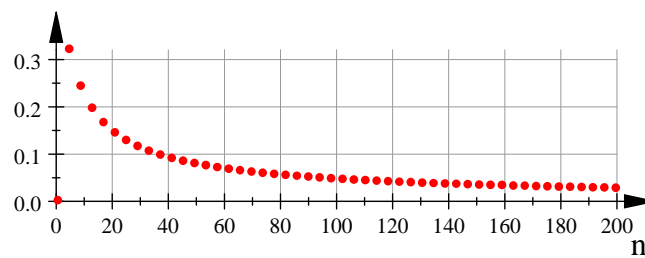
6.1.5 Quelques limites usuelles

Dans la suite on va donner, et démontrer les valeurs de limites de certaines suites numériques fréquemment utilisées dans les exercices :

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

La forme est $\frac{\infty}{\infty}$ donc on peut appliquer le théorème d'Hospital :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

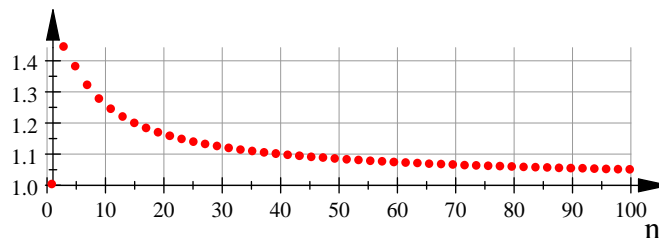


$\ln n / n$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Soit $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$, alors $\ln(a_n) = \frac{1}{n} \ln n$

mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n) = 0$ par suite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$



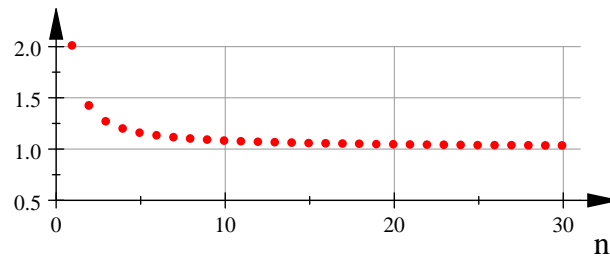
$\sqrt[n]{n}$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$$

Posons $a_n = x^{1/n} \implies \ln(a_n) = \frac{1}{n} \ln x$

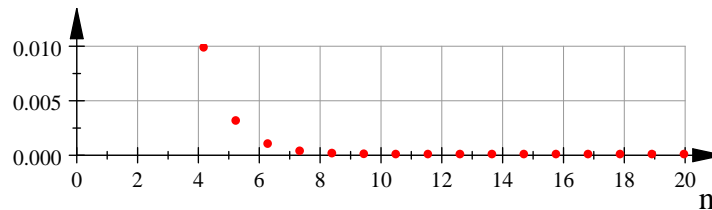
Pour x fixé $\ln x$ est constante, et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ donc $\frac{1}{n} \ln x \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$

$$x^{1/n} = a_n = e^{\ln a_n} \rightarrow e^0 = 1$$



$$2^{1/n}$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ si $|x| < 1$: $\varepsilon^{1/n} \rightarrow 1$ si $n \rightarrow \infty$ car $\frac{1}{n} \rightarrow 0$
 Mais $|x| < 1$ alors il existe un entier N tel que $\varepsilon^{1/N} > |x|$
 Autrement : $|x^N| = |x|^N < \varepsilon \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$



$$3^{-n}$$

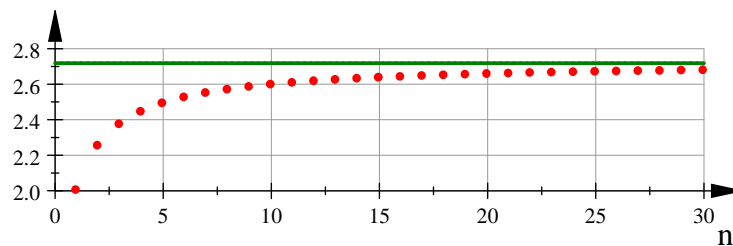
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Soit $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \implies \ln(a_n) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{\ln(1 + x/n)}{1/n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x/n)}{1/n}$ | règle d'Hospital

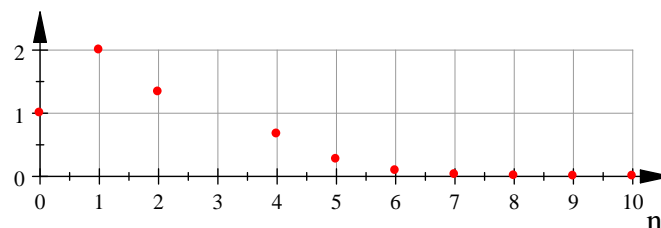
$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + x/n}\right) \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x/n} = x$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n) = x \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n)} = e^x$



$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

6. $\forall x$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$



6.2 Séries numériques : Définitions

Considérons un rectangle d'aire $A = 1$. En découpant le rectangle au moitié on obtient deux rectangles chacun d'aire $1/2$, découpons un de demi rectangles obtenus au moitié on aura deux rectangles d'aires $1/4$, en continuant, n fois, à diviser un de demi rectangles en deux on obtient des rectangles d'aires : $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}$, etc.

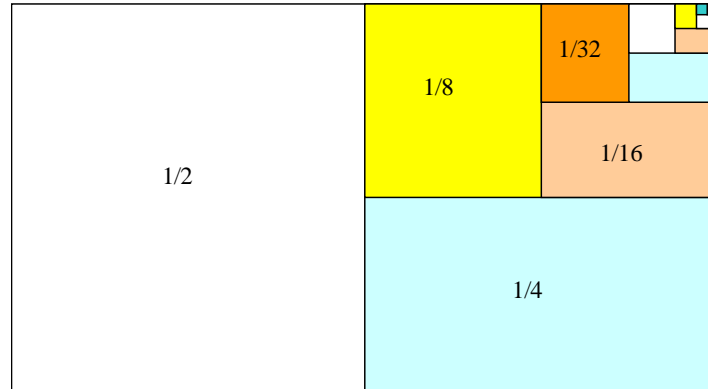


FIG. 6.1 – Le rectangle divisé au moitié n fois

C'est-à-dire, si on fait augmenter indéfiniment le nombre des rectangles, on obtient une suite des rectangles d'aires : $a_n = \left[\frac{1}{2^n} \right]_{n=1}^{\infty}$.

L'aire du rectangle initial est la somme des aires élémentaires a_n :

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

La somme ainsi définie est une série des termes a_n .

Définition 6.3 On appelle série de terme générale u_n la suite (S_n) des **sommes partielles**

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad (6.10)$$

○

1. Les premiers termes de la série sont : $S_0 = u_0, S_1 = u_0 + u_1 = S_0 + u_1, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = S_{n-1} + u_n$.
2. la série peut être définie sur \mathbb{N} ou à partir d'un rang n_0

La quantité :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad (6.11)$$

n'est pas une somme au sens direct du mot mais c'est la limite, si elle existe, de la suite des sommes partielles.

Si telle limite existe et elle est finie, on dit que la série est *convergente*, dans le cas contraire la série est *divergente*.

ä **Exemple 6.9** Estimer la convergence de la série numérique : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\begin{aligned} \text{Solution : } S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \end{aligned}$$

6.2.1 Série géométrique

Définition 6.4 On appelle série géométrique toute série de la forme

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

avec a et q sont deux réels fixes. $a \neq 0$ est le premier terme et q s'appelle la raison de la série, elle peut être positive ou négative.

ä **Exemple 6.10** $S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) : a = 1, q = \frac{1}{2}$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{3^n}\right) : a = 2, q = \frac{-1}{3}$$

a) Somme partielle de la série géométrique

Soit à calculer la somme partielle $S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n$ d'une série géométrique et $q \neq 1$.

Si on fait multiplier S_n par q on trouve : $qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n+1}$

Calculons par suite la différence $S_n - qS_n$:

$$S_n - qS_n = (a + aq + \cdots + aq^n) - (aq + \cdots + aq^n + aq^{n+1}) = a - aq^{n+1}$$

$$\implies (1 - q) S_n = a (1 - q^{n+1}) \text{ d'où :}$$

$$S_n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (6.12)$$

– Si $|q| < 1$ alors $q^{n+1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et la série est convergente :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \quad (6.13)$$

– Si $|q| > 1$ alors $q^{n+1} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ et la série est divergente.

ä **Exemple 6.11** $S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{1 - (1/2)} = 2$

ä **Exemple 6.12** *Considérons le nombre : 3.3333333...*

On peut écrire ce nombre sous la forme d'une série géométrique telle que $a = 3$ et $q = 0.1$, en effet :

$$\begin{aligned} 3.3333333 &= 3 + 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots \\ &= 3 + 3 \times (0.1) + 3 \times (0.1)^2 + \dots + 3 \times (0.1)^n + \dots \\ &= \frac{3}{1 - 0.1} = \frac{3}{0.9} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

6.2.2 Théorèmes généraux

Théorème 6.8 *Pour que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge il est nécessaire que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.*

cette condition est nécessaire mais elle n'est pas suffisante.

Démonstration :

Supposons que la série $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est convergente donc $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ où S est un nombre fini et fixe ; mais on a aussi

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ car n et $(n-1)$ tendent vers l'infini en même temps, par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [(u_0 + \dots + u_{n-1} + u_n) - (u_0 + \dots + u_{n-1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie

par exemple la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente même que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

Théorème 6.9 Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est divergente

ä **Exemple 6.13** La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ est divergente

$$\text{En effet : } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$$

Théorème 6.10 (Condition de Cauchy) La série $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si et seulement si la suite S_n des sommes partielles est une suite de Cauchy c.à.d. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall p, q \geq N(\varepsilon) \implies |S_p - S_q| \leq \varepsilon \quad (6.14)$$

cette condition est alors nécessaire et suffisante.

Théorème 6.11 Si $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est une série à termes positifs et si on a $S_n \leq M$, avec M indépendant de n alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

C'est une condition nécessaire et suffisante de convergence.

6.2.3 Test de convergence

Lorsque nous étudions une série (S_n) , l'une des questions fondamentales est celle de la convergence ou de la divergence de cette série.

Si une série converge, son terme général u_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Ce critère est nécessaire mais non suffisant pour établir la convergence d'une série.

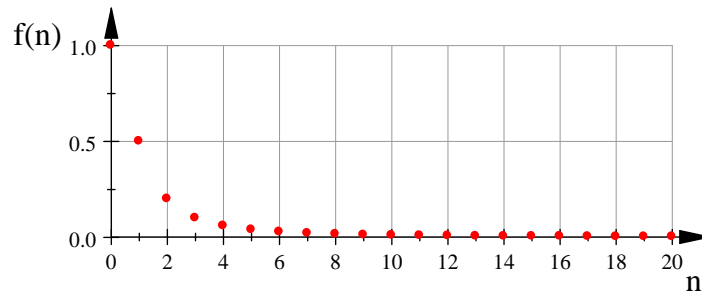
Par contre, si ce critère n'est pas rempli, on est absolument sûr que la série ne converge pas (donc elle diverge!).

Des méthodes sont proposées pour approfondir le critère de convergence

Théorème 6.12 (test et comparaison de l'intégrale) Soit $f(x)$ une fonction continue et monotone décroissante si $x \rightarrow +\infty$, alors : $\sum_{n \geq N} f(n)$ et $\int_N^{\infty} f(x) dx$ sont de même nature.

ä **Exemple 6.14** Etudier la convergence de la série : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ c'est une fonction continue $\forall x \in \mathbb{R}$



$$\frac{df}{dx} = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \leq 0 \text{ pour } x \geq 0 \text{ donc } f(x) \text{ est monotone décroissante } \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \text{ est convergente donc la série } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \text{ est convergente}$$

Théorème 6.13 (Séries de comparaison de Riemann) :

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Démonstration :

Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, elle est continue et monotone décroissante pour $x \geq 1$, et étudions la nature de l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^X = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{X^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{1-\alpha}$$

- Si $\alpha > 1$ alors $-\alpha + 1 < 0$ et $X^{-\alpha+1} \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} : \text{convergente}$$

- Si $\alpha \leq 1$ donc $-\alpha + 1 \geq 0$ et $X^{-\alpha+1} \rightarrow \infty$ quand $X \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ est divergent}$$

Théorème 6.14 (Comparaison des séries) Soient deux séries $\sum_{n>0} u_n$ et $\sum_{n>0} v_n$. Si l'on a pour $n \geq N$ l'inégalité $u_n \leq v_n$, alors :

- $\sum_{n>0} v_n$ diverge si $\sum_{n>0} u_n$ diverge

- $\sum_{n>0} u_n$ converge si $\sum_{n>0} v_n$ converge

ä **Exemple 6.15** $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 7n}$

$$\text{on a } n^4 < n^4 + 7n \implies \frac{1}{n^4} > \frac{1}{n^4 + 7n}$$

Or la série $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ est convergente d'après le test de Riemann

et puisque $S' > S$ donc S est convergente

Théorème 6.15 (Equivalence des séries) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lambda \neq 0$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature (toutes deux divergentes ou toutes deux convergentes).

ä **Exemple 6.16** Etudions la convergence de la série $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 7n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Comparons avec la série : $V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qui est une série convergente.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 - 5n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3(1 - 5n^{-2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - 5n^{-2})} = 1 \end{aligned}$$

on déduit que S est convergente.

Théorème 6.16 (Règle de Cauchy) Soit la série $S_n = \sum_{n \geq 0} u_n$ Supposons que $\sqrt[n]{u_n}$ a une limite finie pour $n \rightarrow \infty$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

Alors :

- S_n converge si $\ell < 1$
- elle diverge si $\ell > 1$
- Si $\ell = 1$ on ne peut rien dire.

ä **Exemple 6.17 :**

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+6} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n-1}{2n+6} \right)^n \right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+6} = \frac{1}{2} < 1$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+6} \right)^n \text{ est convergente.}$$

Théorème 6.17 (Règle de D'Alembert) Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ alors : avec à nouveau les mêmes considérations que pour la règle de Cauchy :

- Si $q < 1$ la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $q > 1$ la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
- Si $q = 1$ Rien à dire.

ä **Exemple 6.18** $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(-1)^n n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)(n+1)}{2n} \right| = \frac{1}{2} < 1 \implies \text{la série est convergente}$$

6.2.4 Séries alternées

Définition 6.5 Une série est dite alternée si le produit $(u_{n+1})(u_n)$ est négatif pour tout n

Théorème 6.18 (de Leibniz) Soit u_n une série alternée telle que :

- i) $|u_n|$ est monotone décroissante,
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

alors elle converge et son reste $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$ est majoré par $|u_n|$: $|r_n| \leq |u_n|$.

6.3 Représentation des fonctions en série

Dans la suite de ce chapitre on va étudier quelques types des séries utiles pour l'approximation de certaines fonctions, en particulier la série de Taylor .

La série de Fourier sera en particulier traitée dans un autre chapitre

Il s'agit des séries de fonctions dont les termes ne sont plus des nombres mais des fonctions de la variable indépendante x ou t , etc.

Une suite des fonctions est une suite de la forme $f_n(x) = f(n, x)$ avec n est un entier naturel et x une variable réelle dans le domaine de définition de la fonction f .

Par exemple la suite $f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right)$ est une suite des fonctions :

$$f_1(x) = \sin(x + 1), f_2(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\right), \dots$$

$$g_n(t) = \sin n\omega t : g_1(t) = \sin \omega t, g_2(t) = \sin 2\omega t, \dots, g_{20}(t) = \sin 20\omega t, \dots$$

La série des fonction est de la forme $S_n = \sum_{k=1}^n f_k(x)$

Par exemple :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(x + \frac{1}{k}\right) = \sin\left(x + 1\right) + \sin\left(x + \frac{1}{2}\right) + \dots + \sin\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

$$V_n = \sum_{k=1}^n \sin(k\omega t) = \sin \omega t + \sin 2\omega t + \sin 3\omega t + \dots + \sin n\omega t$$

Il est évident que la limite dans ce cas, si elle existe, est une fonction :

$$\text{Par exemple : } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(x + \frac{1}{n}\right) = \sin x$$

6.3.1 Série de puissance

C'est une série de la forme :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \quad (6.15)$$

où a est une constante donnée, et a_n sont généralement les termes d'une suite numérique.

Considérons le cas où $a_n = 1 \forall n$.

Remarquons que pour chaque valeur fixe de x la série (S) est une série géométrique. En effet, supposons que x est fixée et pour $a_n = 1$ on a :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (x - a)^n = 1 + (x - a) + (x - a)^2 + \dots + (x - a)^n + \dots \quad (6.16)$$

Le premier terme est 1 et la raison $q = (x - a)$ donc la somme est :

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - (x - a)^{n+1}}{1 - (x - a)} \quad (6.17)$$

Cette série se converge si $|q| = |x - a| < 1$ c'est-à-dire pour $a - 1 < x < a + 1$, dans ce cas on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - a)^n = \frac{1}{1 + a - x} \quad (6.18)$$

Pour les valeurs de x telles que $|x - a| \geq 1$ la série se diverge.

Remarque 6.2

D'une façon générale la série de puissance se converge si $|x - a| < r$, la constante r s'appelle rayon de convergence.

Théorème 6.19 Pour n'importe quelle série de puissance donnée $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$, trois cas possibles :

1. La série se converge $\forall x \in \mathbb{R}$ alors le rayon de convergence est $r = \infty$.
2. La série se converge seulement si $x = a$, le rayon de convergence est $r = 0$.
3. La série se converge si $|x - a| < r$ et se diverge pour $|x - a| \geq r$ avec $0 < r < \infty$.

ä **Exemple 6.19** Considérons la série $\sum_{n=0}^N (x-1)^n$

Elle est convergente si $|x-1| < 1$ c'est-à-dire si $0 < x < 2$ le rayon de convergence est $r = 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (x-1)^n = \frac{1}{2-x} \text{ avec } 0 < x < 2$$

Sur la figure 2 on représente la fonction $f(x) = \frac{1}{2-x}$ et les polynômes :

$$P_1(x) = 1 + (x-1) = x$$

$$P_2(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 = x^2 - x + 1$$

$$P_5(x) = \sum_{n=0}^5 (x-1)^n = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 3x$$

$$P_8(x) = \sum_{n=0}^8 (x-1)^n = 1 - 4x + 16x^2 - 34x^3 + 46x^4 - 40x^5 + 22x^6 - 7x^7 + x^8$$

6.3.2 Série de Taylor

Les séries de Taylor représentent un des outils de base pour calculer les fonctions à une ou plusieurs variables. Elles permettent de plus de faire l'analyse fine des fonctions.

Définition 6.6 La série de Taylor est une série de puissance associée à la fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable dans un intervalle I telle que le polynôme

$$P(x) = \sum_{k=0}^n A_k (x-a)^k$$

vérifie la propriété suivante :

$$\left. \frac{d^m P}{dx^m} \right|_{x=a} = \left. \frac{d^m f}{dx^m} \right|_{x=a}$$

c'est-à-dire : $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a)$, $P''(a) = f''(a)$, ...

Le problème donc c'est de trouver les coefficients A_k .

Considérons une fonction $f(x)$ dérivable jusqu'à l'ordre $(n+1)$ dans un intervalle I .

Soit à chercher un polynôme $P(x)$ de degré n tel que au point $a \in I$ on a $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a)$, $P''(a) = f''(a)$ etc.

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^n A_k (x-a)^k = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + A_n(x-a)^n$.

Calculons les dérivées, jusqu'à l'ordre n de $P(x)$:

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \dots + nA_n(x-a)^{n-1}$$

$$P''(x) = 2A_2 + 2.3A_3(x-a) + \dots + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2}$$

⋮

$$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 2 \cdot 1 \cdot A_n$$

Pour $x = a$ on aura :

$$f^{(n)}(a) = P^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot A_n = (n!) A_n \implies A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Alors :

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (6.19)$$

La série de Taylor est une représentation approximative de la fonction $f(x)$, par suite il existe une certaine erreur lors de cette approximation.

Soit $R_n(x)$ la différence entre $P(x)$ et $f(x)$ alors :

$$f(x) = P(x) + R_n(x) \quad (6.20)$$

Le reste $R_n(x)$ est une quantité infiniment petite et elle est égale à

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \quad (6.21)$$

où $0 < \theta < 1$.

D'où la formule de Taylor (avec $\varepsilon = a + \theta(x-a)$)

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[\varepsilon] \quad (6.22)$$

à **Exemple 6.20** Cherchons la série de Taylor au voisinage de $x = 1$ de la fonction $f(x) = \ln x$

Solution : On fait calculer les dérivées de $f(x)$ jusqu'à l'ordre k au point $x = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3 \cdot 2}{x^4} = -\frac{3!}{x^4}$$

La dérivée d'ordre k est :

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{x^k}$$

alors que

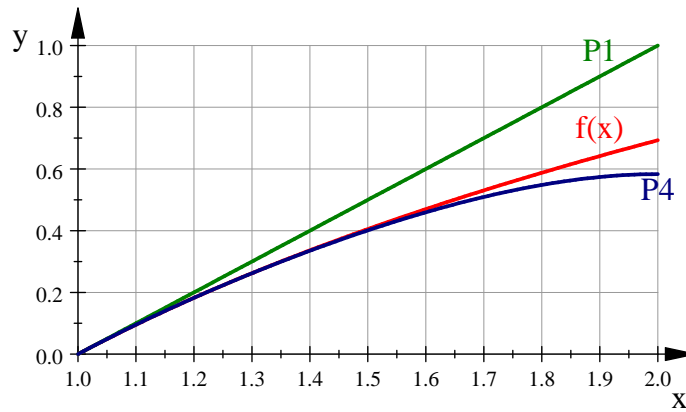
$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} (k-1)! ; k \geq 1$$

avec $f(1) = 0$, la série de Taylor associée s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{k!} (x-1)^k$$

ou bien :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$$



graphe de $\ln x$ et $P_1(x)$ et $P_4(x)$

a) Série de Maclaurin

C'est un cas particulier de série de Taylor, pour la quelle on choisit $a = 0$.

Si $f(x)$ est une fonction dérivable autant de fois que l'on veut, le développement de Maclaurin est :

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[\theta x] \quad (6.23)$$

b) Applications

1. Les séries de Taylor et de Maclaurin sont utiles pour calculer les limites de certaines fonctions.
2. Connaissances la représentation en série de Taylor d'une fonction $f(x)$ on peut déduire les représentations des fonctions dérivées et primitives par dérivation ou intégration de la séries termes à termes.
3. On utilise la série de Taylor (ou de Maclaurin) pour calculer des intégrales ou pour résoudre des équations différentielles

6.4 Exercices

On donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0; \quad n! = \sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon_n) \left(\frac{n}{e}\right)^n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Exercice 6.1 Démontrer que la suite $\left[\frac{1}{n^2}\right]$ est convergente et vérifier que n satisfait l'inégalité

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

Exercice 6.2 Calculer les limites des suites suivantes :

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^2$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 5}{2n + 6}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3 + n} - 3}{n + 1}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

Exercice 6.3 Ecrire les premiers termes des séries dont on connaît le terme générale :

$$1. u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$2. u_n = \frac{n^2}{n-1}$$

$$3. u_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$4. u_n = (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$5. u_n = \frac{(n!)^2}{n^n}$$

$$6. u_n = \frac{n}{2^n}$$

Exercice 6.4 Etudier la nature des séries suivantes dont on connaît le terme générale :

$$1. \frac{1}{n^p}$$

$$2. \frac{n}{2^n}$$

$$3. \frac{n+3}{n^2}$$

$$4. \frac{1}{n^2 + 4n - 5}$$

$$5. \frac{\exp(jn)}{n^2}$$

$$6. \frac{n(2+j)^n}{2^n}$$

$$7. \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$8. \frac{j}{n} \exp\left(\frac{j\pi}{n}\right)$$

Exercice 6.5 Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence simple des séries entières de terme général suivant, sachant que $x \in \mathbb{R}$, a, b, c sont des réels.

$$1. u_n(x) = \frac{\ln n}{n^2} x^n, n \in \mathbb{N}^*$$

$$2. u_n(x) = (\cosh n) x^n$$

$$3. u_n(x) = \frac{x^n}{3^{3n}}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$4. u_n(x) = (2^n + 1) x^n$$

$$5. u_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) x^n, n \in \mathbb{N}$$

$$6. u_n = e^{an^2 + bn + c} x^n$$

$$7. u_n = n^{\ln n} x^n, n \in \mathbb{N}^*$$

$$8. u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n, n \in \mathbb{N}^*$$

$$9. u_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$$

$$10. u_n = \left(\frac{an+b}{n+c}\right)^n x^n, n \in \mathbb{N}, a > 0$$

Exercice 6.6 On considère la série géométrique définie par le terme général $u_n = x^n$ pour tout entier $n \geq 0$ avec x un nombre réel ou complexe. On désigne par $S_n = \sum_{k=0}^n x^k$ la somme partielle de n premiers termes.

1. Calculer $(1-x)S_n$ et déduire la somme S_n
2. Etudier la convergence de cette série suivant les valeurs de x ($x > 1, x = 1$ et $x < 1$)

Exercice 6.7 Soit x un nombre réel et soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficients réels.

1. Démontrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est convergente
2. Montrer que la série de terme générale $\frac{P(n)}{n!}x^n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 6.8 En utilisant le développement en série calculer les valeurs approximatives des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

$$2. \int_0^1 \exp(-x^2) dx$$

$$3. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

$$4. \int_0^1 \sin(x^2) dx$$

$$5. \int_0^x \frac{\cos x}{x} dx$$

$$6. \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

$$7. \int_0^x \frac{1}{1+x^4} dx$$

$$8. \int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

Annexe A

Fonctions Trigonométriques

Définition A.1 Un *angle* est généré par rotation d'un **rayon** autour d'un point fixe. Les angles se mesurent en degrés ($^\circ$) ou en radians (rad).

- $1^\circ = \frac{1}{360}$ d'une rotation complète dans le sens opposé de montre
- 1 rad = la proportion $\frac{1}{2\pi}$ d'une rotation complète.
- $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad
- 1 rad = $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$
- $1^\circ = 60'$
- $1' = 60''$.
- 1 rad = 1000 mrad
- 1 rad = $1.0 \times 10^6 \mu\text{rad}$

A.1 Les Fonctions Trigonométriques

Soit θ l'angle que fait un rayon avec l'axe Ox , et (x, y) les coordonnées du point sommet. r la distance de l'origine à ce point.

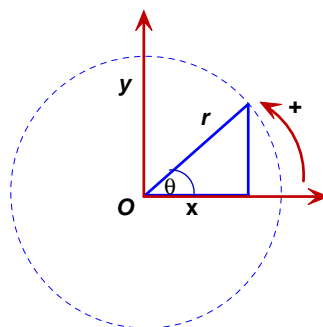


FIG. A.1 – cercle trigonométrique

On définit les fonctions trigonométriques comme la suivantes :

A.1.1 Fonctions standards

- sinus $\theta = \sin \theta = \frac{y}{r}$
- cosinus $\theta = \cos \theta = \frac{x}{r}$
- tangente $\theta = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x}$, si $x \neq 0$
- cotangente $\theta = \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{x}{y}$, si $y \neq 0$
- secant $\theta = \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{r}{x}$, si $x \neq 0$
- cosecant $\theta = \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{r}{y}$, si $y \neq 0$

a) Fonctions Auxiliaires

- exsecante $\theta = \text{exsec } \theta = \sec \theta - 1 = \frac{r-x}{x}$, if $x \neq 0$
- versine $\theta = \text{vers } \theta = 1 - \cos \theta = \frac{r-x}{r}$
- coversine $\theta = \text{covers } \theta = 1 - \sin \theta = \frac{r-y}{r}$
- haversine $\theta = \text{hav } \theta = \frac{1}{2} \text{vers } \theta = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{r-x}{2r}$

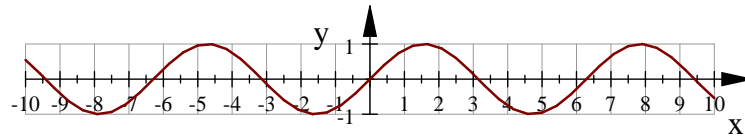
A.1.2 Valeurs des Fonctions des angles particuliers

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞	1
csc	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	∞

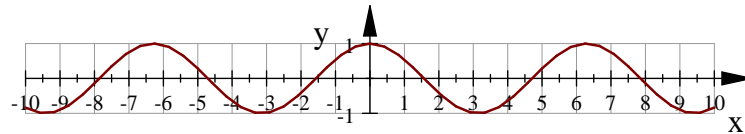
A.1.3 Intervalles des valeurs

Quadrant	sin	cos	tan	cot
I	0 \rightarrow +1	+1 \rightarrow 0	0 \rightarrow + ∞	+ ∞ \rightarrow 0
II	+1 \rightarrow 0	0 \rightarrow -1	- ∞ \rightarrow 0	0 \rightarrow - ∞
III	0 \rightarrow -1	-1 \rightarrow 0	0 \rightarrow + ∞	+ ∞ \rightarrow 0
IV	-1 \rightarrow 0	0 \rightarrow +1	- ∞ \rightarrow 0	0 \rightarrow - ∞

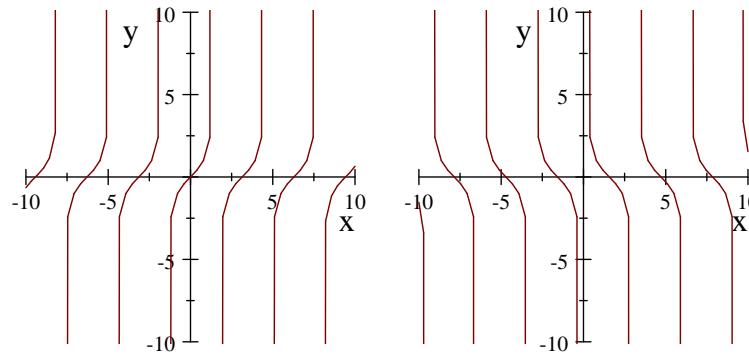
A.1.4 Graphes



$y = \sin x$

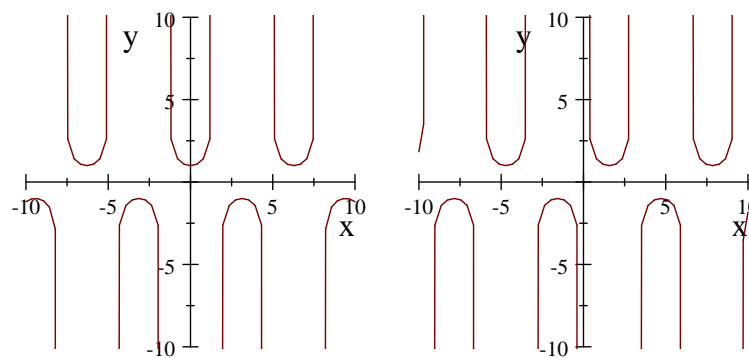


$y = \cos x$



$y = \tan x$

$y = \cot x$



$y = \sec x$

$y = \csc x$

A.1.5 Fonctions des angles en Terms des angles du Quadrant I

$n \in \mathbb{N}$	$-\theta$	$90^\circ \pm \theta$	$180^\circ \pm \theta$	$270^\circ \pm \theta$	$n(360)^\circ \pm \theta$
sin	$-\sin \theta$	$+\cos \theta$	$\mp \sin \theta$	$-\cos \theta$	$\pm \sin \theta$
cos	$+\cos \theta$	$\mp \sin \theta$	$-\cos \theta$	$\pm \sin \theta$	$+\cos \theta$
tan	$-\tan \theta$	$\mp \cot \theta$	$\pm \tan \theta$	$\mp \cot \theta$	$\pm \tan \theta$

$n \in \mathbb{N}$	$-\theta$	$90^\circ \pm \theta$	$180^\circ \pm \theta$	$270^\circ \pm \theta$	$n(360)^\circ \pm \theta$
cot	$-\cot \theta$	$\mp \tan \theta$	$\pm \cot \theta$	$\mp \tan \theta$	$\pm \cot \theta$
sec	$+\sec \theta$	$\mp \csc \theta$	$-\sec \theta$	$\pm \csc \theta$	$+\sec \theta$
csc	$-\csc \theta$	$+\sec \theta$	$\mp \csc \theta$	$-\sec \theta$	$\pm \csc \theta$

A.2 Identités Trigonométriques

A.2.1 Identités de Pythagore

- $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$
- $1 + \tan^2 \varphi = \sec^2 \varphi$
- $1 + \cot^2 \varphi = \csc^2 \varphi$

A.2.2 Définitions

- $\tan \varphi = \frac{1}{\cot \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$
- $\cot \varphi = \frac{1}{\tan \varphi} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$
- $\csc \varphi = \frac{1}{\sin \varphi}$
- $\sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi}$

A.2.3 Périodicité

- Période = 2π
 - $\sin \varphi = \sin(\varphi + 2\pi n)$, $\sin(\varphi \pm \pi) = -\sin \varphi$
 - $\cos \varphi = \cos(\varphi + 2\pi n)$, $\cos(\varphi \pm \pi) = -\cos \varphi$
 - $\sec \varphi = \sec(\varphi + 2\pi n)$, $\sec(\varphi \pm \pi) = -\sec \varphi$
 - $\csc \varphi = \csc(\varphi + 2\pi n)$, $\csc(\varphi \pm \pi) = -\csc \varphi$
- Période = π
 - $\tan \varphi = \tan(\varphi + \pi n)$
 - $\cot \varphi = \cot(\varphi + \pi n)$

A.2.4 Formules d'Addition

a) Formules de Base

- $\sin(\varphi \pm \theta) = \sin \varphi \cos \theta \pm \cos \varphi \sin \theta$
- $\cos(\varphi \pm \theta) = \cos \varphi \cos \theta \mp \sin \varphi \sin \theta$
- $\tan(\varphi \pm \theta) = \frac{\tan \varphi \pm \tan \theta}{1 \mp \tan \varphi \tan \theta}$

En particulier :

$$\begin{aligned} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \varphi & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \cos \varphi \\ \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin \varphi & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \sin \varphi \end{aligned}$$

b) Double Arc

- $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$

$$\begin{aligned}
 - \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 = 1 - 2 \sin^2 \varphi \\
 - \tan 2\varphi &= \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi}
 \end{aligned}$$

c) Demi Arc

$$\begin{aligned}
 - \sin \frac{\varphi}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} \text{ (positive si } \frac{\varphi}{2} \text{ dans les quadrants I ou II, négative ailleurs)} \\
 - \cos \frac{\varphi}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \text{ (positive si } \frac{\varphi}{2} \text{ dans les quadrants I ou IV, négative ailleurs)} \\
 - \tan \frac{\varphi}{2} &= \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}} \text{ (positive si } \frac{\varphi}{2} \text{ est dans les quadrants I ou III, négative ailleurs)}
 \end{aligned}$$

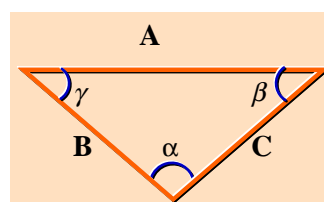
d) Arcs multiples

$$\begin{aligned}
 - \sin 3\varphi &= 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi \\
 - \cos 3\varphi &= 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \\
 - \sin n\varphi &= 2 \sin((n-1)\varphi) \cos \varphi - \sin(n-2)\varphi \\
 - \cos n\varphi &= 2 \cos((n-1)\varphi) \cos \varphi - \cos(n-2)\varphi
 \end{aligned}$$

e) Autres Identités

$$\begin{aligned}
 - \sin \varphi \pm \sin \theta &= 2 \sin \frac{\varphi \pm \theta}{2} \cos \frac{\varphi \mp \theta}{2} \\
 - \cos \varphi + \cos \theta &= 2 \cos \frac{\varphi + \theta}{2} \cos \frac{\varphi - \theta}{2} \\
 - \cos \varphi - \cos \theta &= -2 \sin \frac{\varphi + \theta}{2} \sin \frac{\varphi - \theta}{2} \\
 - \sin^2 \varphi &= \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \\
 - \cos^2 \varphi &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \\
 - \sin^3 \varphi &= \frac{3 \sin \varphi - \sin 3\varphi}{4} \\
 - \cos^3 \varphi &= \frac{3 \cos \varphi + \cos 3\varphi}{4} \\
 - \sin \varphi \sin \theta &= \frac{\cos(\varphi - \theta) - \cos(\varphi + \theta)}{2} \\
 - \cos \varphi \cos \theta &= \frac{\cos(\varphi - \theta) + \cos(\varphi + \theta)}{2} \\
 - \sin \varphi \cos \theta &= \frac{\sin(\varphi + \theta) + \sin(\varphi - \theta)}{2} \\
 - 2 \cos^2 \varphi (1 + 2 \cos \varphi) &= 1 + 3 \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi
 \end{aligned}$$

A.2.5 Théorème de sinus et lois de cosinus



$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma} \quad (\text{A.1})$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma \quad (\text{A.2})$$

A.2.6 Lois de Tangente

$$\frac{A - B}{A + B} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

$$S = \frac{1}{2}(A + B + C)$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(S - A)(S - B)}{S(S - C)}}$$

A.2.7 Fonctions hyperboliques

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$

a) Formules d'addition et de soustraction

$$\begin{aligned} - \cosh(a + b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \\ - \cosh(a - b) &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \\ - \sinh(a + b) &= \cosh a \sinh b + \cosh b \sinh a \\ - \sinh(a - b) &= \cosh b \sinh a - \cosh a \sinh b \\ - \tanh(a + b) &= \frac{\cosh a \sinh b + \cosh b \sinh a}{\cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} \\ - \tanh(a - b) &= \frac{\sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b}{\cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b} \end{aligned}$$

b) Formules doubles arcs

$$\begin{aligned} - \sinh 2\theta &= 2 \cosh \theta \sinh \theta \\ - \cosh 2\theta &= \cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta = 2 \cosh^2 \theta - 1 \\ - \tanh 2\theta &= \frac{2 \cosh \theta \sinh \theta}{2 \cosh^2 \theta - 1} = \frac{2 \tanh \theta}{1 + \tanh^2 \theta} \\ - 1 - \tanh^2 \theta &= \frac{1}{\cosh^2 \theta} \end{aligned}$$

A.2.8 Relations avec les fonctions trigonométriques

Puisque la fonction exponentielle peut être prolongée à l'ensemble des nombres complexes, nous pouvons aussi étendre les définitions des fonctions hyperboliques à l'ensemble des nombres complexes. Des formules d'Euler, on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} - \cos x &= \cosh jx \\ - j \sin x &= \sinh jx \end{aligned}$$

- $\cosh x = \cos jx$
- $\sinh x = -j \sin jx$

A.2.9 Fonctions réciproques

- Argument sinus hyperbolique : $\arg \sinh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$
- Argument cosinus hyperbolique : $\arg \cosh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$
- Argument tangente hyperbolique : $\arg \tanh x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

A.2.10 L'alphabet grec

<i>Letters</i>	<i>Names</i>	<i>Letters</i>	<i>Names</i>	<i>Letters</i>	<i>Names</i>
A	α Alpha	I	ι Iota	P	ρ Rho
B	β Beta	K	κ Kappa	Σ	σ Sigma
Γ	γ Gamma	Λ	λ Lambda	T	τ Tau
Δ	δ Delta	M	μ Mu	Y	υ Upsilon
E	ε Epsilon	N	ν Nu	Φ	ϕ Phi
Z	ζ Zeta	Ξ	ξ Xi	X	χ Chi
M	η Eta	O	o Omicron	Ψ	ψ Psi
Θ	θ Theta	Π	π Pi	Ω	ω Omega

Annexe B

Dérivées

B.1 Définition

La dérivée d'une fonction $f(x)$ est la limite

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si telle limite existe.

B.2 Règles de Différentiation

f, g, u, v , et y représentent des fonctions de la variable réelle x , et c et n sont constants.

- | | |
|--|--|
| 1. $c' = 0$ | $\frac{d}{dx}(c) = 0$ |
| 2. $(cf)' = cf'$ | $\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$ |
| 3. $(f+g)' = f' + g'$ | $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ |
| 4. $(f-g)' = f' - g'$ | $\frac{d}{dx}(u-v)(x) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$ |
| 5. $(x^n)' = nx^{n-1}$ | $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ |
| 6. $(f(x)^n)' =$ | $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$ |
| 7. $(fg)' = f'g + fg'$ | $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ |
| 8. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ | $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$ |
| 9. $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$ | $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ |

B.3 Formules de Dérivation

u et v fonctions de x ; et a, b, n constants; $e = 2.71828...$

B.3.1 Fonctions Algébriques

1. $\frac{d}{dx}(au \pm bv) = a \frac{du}{dx} \pm b \frac{dv}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$

B.3.2 Fonctions Trigonométriques

1. $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}(\text{vers } u) = \sin u \frac{du}{dx}$

B.3.3 Fonctions Trigonométriques Inverses

1. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, -\pi \leq \sec^{-1} u < -\frac{\pi}{2}, 0 \leq \sec^{-1} u < \frac{\pi}{2}$
6. $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, -\pi < \csc^{-1} u \leq -\frac{\pi}{2}, 0 < \sec^{-1} u \leq \frac{\pi}{2}$

B.3.4 Fonctions Exponentielles et Logarithmiques

1. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \log_e a \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$

B.3.5 Fonctions Hyperboliques

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}; \cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \quad (\text{B.1})$$

1. $\frac{d}{dx} (\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx} (\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx} (\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx} (\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx} (\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx} (\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$

B.3.6 Fonctions Hyperboliques Inverses

1. $\frac{d}{dx} (\sinh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx} (\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, u > 1$
3. $\frac{d}{dx} (\tanh^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx} (\coth^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx} (\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, u > 0$
6. $\frac{d}{dx} (\operatorname{csch}^{-1} u) = -\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$

Annexe C

Table des Intégrales

C.1 Primitives usuelles

$$1. \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$2. \int u^n \, du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$4. \int e^u \, du = e^u + C$$

$$5. \int a^u \, du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$$

$$6. \int \sin u \, du = -\cos u + C$$

$$7. \int \cos u \, du = \sin u + C$$

$$8. \int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$9. \int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$10. \int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

$$11. \int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$$

$$12. \int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C$$

$$13. \int \cot u \, du = \ln |\sin u| + C$$

$$14. \int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$$

$$15. \int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + C$$

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$17. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$18. \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$19. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$$

$$20. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

C.2 Racines des Expressions Quadratiques

C.2.1 Formes avec $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$

$$1. \int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(u + \sqrt{a^2 + u^2} \right) + C$$

$$2. \int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{8} (a^2 + 2u^2) \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^4}{8} \ln \left(u + \sqrt{a^2 + u^2} \right) + C$$

$$3. \int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 + u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + C$$

$$4. \int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln \left(u + \sqrt{a^2 + u^2} \right) + C$$

$$5. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln \left(u + \sqrt{a^2 + u^2} \right) + C$$

$$6. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(u + \sqrt{a^2 + u^2} \right) + C$$

$$7. \int \frac{du}{u \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u} \right| + C$$

$$8. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$$

$$9. \int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 + u^2}} + C$$

C.2.2 Formes avec $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$

$$1. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$2. \int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$3. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$4. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{1}{u} \sqrt{a^2 - u^2} - \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$5. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$6. \int \frac{du}{u \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$7. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u} \sqrt{a^2 - u^2} + C$$

$$8. \int (a^2 - u^2)^{3/2} du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$9. \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

C.2.3 Formes avec $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$

$$1. \int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$2. \int u^2 \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$3. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \cos^{-1} \frac{a}{u} + C$$

$$4. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$5. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$6. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

$$7. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$$

$$8. \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

C.2.4 Formes avec $\sqrt{2au - u^2}$

$$1. \int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u - a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + C$$

$$2. \int u \sqrt{2au - u^2} du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + C$$

$$3. \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u} du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + C$$

$$4. \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + C$$

$$5. \int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + C$$

$$6. \int \frac{u du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + C$$

$$7. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u + 3a)}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a - u}{a} \right) + C$$

$$8. \int \frac{du}{u \sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$$

C.2.5 Formes avec $a + bu$

$$1. \int \frac{u du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} (a + bu - a \ln |a + bu|) + C$$

$$2. \int \frac{u^2 du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3} [(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2 \ln |a+bu|] + C$$

$$3. \int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + C$$

$$4. \int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$$

$$5. \int \frac{u du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2} \ln |a+bu| + C$$

$$6. \int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$$

$$7. \int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \ln |a+bu| \right) + C$$

$$8. \int u\sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15b^2} (3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$$

$$9. \int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$$

$$10. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3} (8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a+bu} + C$$

$$11. \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right| + C, & \text{if } a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

$$12. \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

$$13. \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

$$14. \int u^n \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{b(2n+3)} \left[u^n (a+bu)^{3/2} - na \int u^{n-1} \sqrt{a+bu} du \right]$$

$$15. \int \frac{u^n du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n \sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a+bu}}$$

$$16. \int \frac{du}{u^n \sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{a+bu}}$$

C.2.6 Fonctions Trigonométriques

$$1. \int \sin^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$2. \int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$3. \int \tan^2 u du = \tan u - u + C$$

$$4. \int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$$

$$5. \int \sin^3 u du = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 u) \cos u + C$$

$$6. \int \cos^3 u du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u) \sin u + C$$

$$7. \int \tan^3 u du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln |\cos u| + C$$

8. $\int \cot^3 u \, du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln |\sin u| + C$
9. $\int \sec^3 u \, du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \tan u| + C$
10. $\int \csc^3 u \, du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + C$
11. $\int \sin^n u \, du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u \, du$
12. $\int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$
13. $\int \tan^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u \, du$
14. $\int \cot^n u \, du = \frac{-1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u \, du$
15. $\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du$
16. $\int \csc^n u \, du = \frac{-1}{n-1} \cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u \, du$
17. $\int \sin au \sin bu \, du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$
18. $\int \cos au \cos bu \, du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$
19. $\int \sin au \cos bu \, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$
20. $\int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u + C \quad \int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + C$
21. $\int u^n \sin u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$
22. $\int u^n \cos u \, du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u \, du$

C.2.7 Fonctions Trigonométriques Inverses

1. $\int \sin^{-1} u \, du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
2. $\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
3. $\int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$
4. $\int u \sin^{-1} u \, du = \frac{2u^2-1}{4} \sin^{-1} u + \frac{u \sqrt{1-u^2}}{4} + C$
5. $\int u \cos^{-1} u \, du = \frac{2u^2-1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u \sqrt{1-u^2}}{4} + C$
6. $\int u \tan^{-1} u \, du = \frac{u^2+1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$
7. $\int u^n \sin^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \sin^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1$
8. $\int u^n \cos^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1$
9. $\int u^n \tan^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{1+u^2} \right], \quad n \neq -1$

C.2.8 Fonctions Exponentielles et Logarithmiques

1. $\int u e^{au} du = \frac{1}{a^2}(au - 1)e^{au} + C$
2. $\int u^n e^{au} du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$
3. $\int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a \sin bu - b \cos bu) + C$
4. $\int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a \cos bu + b \sin bu) + C$
5. $\int \ln u du = u \ln u - u + C$
6. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$
7. $\int \frac{1}{u \ln u} du = \ln |\ln u| + C$

C.2.9 Fonctions Hyperboliques

1. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
2. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
3. $\int \tanh u du = \ln \cosh u + C$
4. $\int \coth u du = \ln |\sinh u| + C$
5. $\int \operatorname{sech} u du = \tan^{-1} |\sinh u| + C$
6. $\int \operatorname{csch} u du = \ln \left| \tan \frac{1}{2}u \right| + C$
7. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
8. $\int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u + C$
9. $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
10. $\int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + C$

Annexe D

Longueurs, Surfaces, Volume

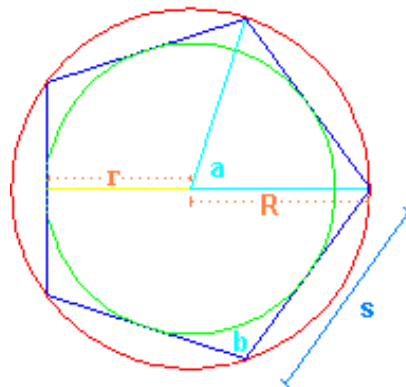
- La **longueur** du segment joignant les points $P(x_1, y_1, z_1)$ et $P(x_2, y_2, z_2)$ est

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

D.1 Polygone régulier de n côtés

Un cercle est **circonscrit au polygone** si tous les sommets du polygone sont sur le cercle. Un cercle est **inscrit dans le polygone** si chaque côté du polygone est **tangent** au cercle.

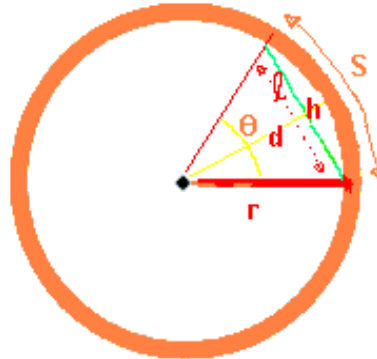
Soit n = le nombre des côté du polygone, R = rayon du cercle circonscrit, r = rayon du cercle inscrit, a = angle au centre déterminé par un côté du polygone (en radians), b = angle entre côtés du polygone (en radians), et s = la longueur d'un côté du polygone.



- L'**aire** du polygone est : $A = \frac{1}{4}ns^2 \cot\left(\frac{1}{n}180^\circ\right)$
- Le **rayon cercle circonscrit** est : $R = \frac{s}{2} \csc\left(\frac{1}{n}180^\circ\right)$
- Le **rayon cercle inscrit** est : $r = \frac{s}{2} \cot\left(\frac{1}{n}180^\circ\right)$
- L'**angle** au centre : $a = \left(\frac{1}{n}\right) 360^\circ = \frac{2\pi}{n}$ radians
- **Angle entre côtés** : $b = \left(\frac{n-2}{n}\right) 180^\circ = \left(\frac{n-2}{n}\right) \pi$ radians
- **Longueur d'un côté** : $s = 2r \tan \frac{a}{2} = 2R \sin \frac{a}{2}$

D.2 Cercle

Soit r = rayon, C = périmètre, D = diamètre, A = aire, θ = angle au centre en radians, S = longueur de l'arc de mesure θ , ℓ = corde opposé à θ , h = distance de corde au cercle), d = distance du center au corde,



- $C = \pi D = 2\pi r$ $A = \pi r^2$
- $S = r\theta = \frac{1}{2}D\theta = D \cos^{-1} \frac{d}{r}$ $\ell = 2\sqrt{r^2 - d^2}$
- $d = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - \ell^2}$ $h = r - d$
- $\theta = \frac{S}{r} = \frac{2S}{D} = 2 \cos^{-1} \frac{d}{r} = 2 \tan^{-1} \frac{\ell}{2d} = 2 \sin^{-1} \frac{\ell}{D}$
- L'air A_θ du secteur de l'angle θ : $\frac{A_\theta}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$, $A_\theta = \frac{1}{2}\theta r^2$
- L'aire du segment limité par un arc et un corde est la différence entre l'aire du secteur et l'aire de région triangulaire de hauteur d et de base ℓ , est,

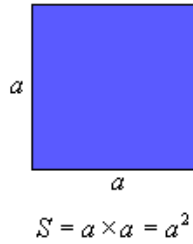
$$A(\text{segment}) = A(\text{secteur}) - A(\text{triangle}) = \frac{1}{2}\theta r^2 - \frac{1}{2}\ell d$$

$$A(\text{segment}) = r^2 \cos^{-1} \left(\frac{r-h}{r} \right) - (r-h) \sqrt{2rh - h^2} = \frac{r^2}{2} (\theta - \sin \theta)$$

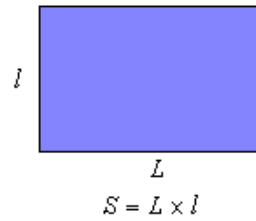
- Le **périmètre** du polygone de n -côtés inscrit dans le cercle de rayon r est : $2nr \sin \frac{\pi}{n}$
 - L'aire du polygone de n -côtés inscrit dans le cercle de rayon r est : $\frac{1}{2}nr^2 \sin \frac{2\pi}{n}$
 - Le **périmètre** du polygone de n -côtés circonscrit au cercle de rayon r est : $2nr \tan \frac{\pi}{n}$
 - L'aire du polygone de n -côtés circonscrit au le cercle de rayon r est : $nr^2 \tan \frac{\pi}{n}$
 - Le **rayon du cercle inscrit dans le triangle** de côtés a , b , et c est
- $$r = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}, s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$
- Le **rayon du cercle circonscrit au triangle** de côtés a , b , et c est
- $$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}, s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

D.3 Autres formes géométriques

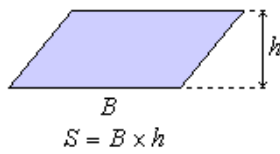
Formule de la surface d'un carré



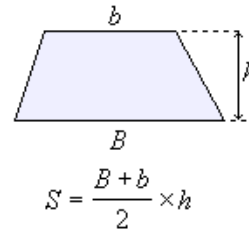
Formule de la surface d'un rectangle



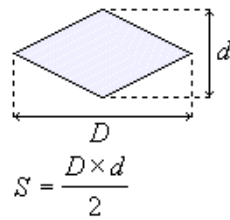
Formule de la surface d'un parallélogramme



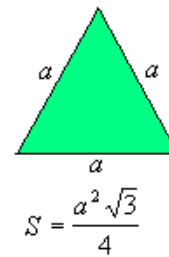
Formule de la surface d'un trapèze



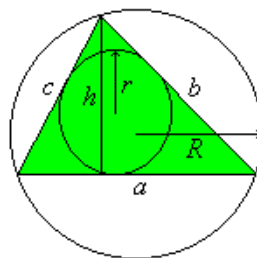
Formule de la surface d'un losange



Formule de la surface d'un triangle équilatéral



Formules de la surface d'un triangle quelconque



$$S = \frac{a \times h}{2}$$

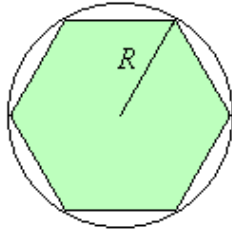
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

N.B. $p = \frac{a+b+c}{2}$

$$S = p \times r$$

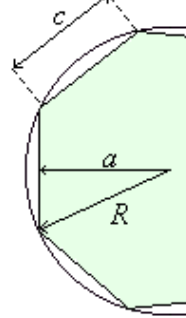
$$S = \frac{a \times b \times c}{4R}$$

Formule de la surface d'un hexagone



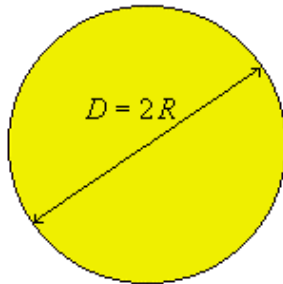
$$S = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{2} \approx 2,6R^2$$

Formule de la surface d'un polygone de n côtés



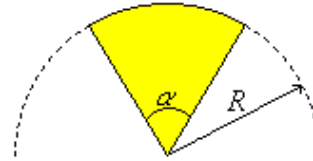
$$S = \frac{n \times c \times a}{2} = \frac{n \times c \times \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}}{2}$$

Formule de la surface d'un cercle



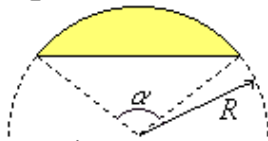
$$S = \pi \times R^2 = \frac{\pi \times D^2}{4}$$

Formule de la surface d'un secteur circulaire de α degrés



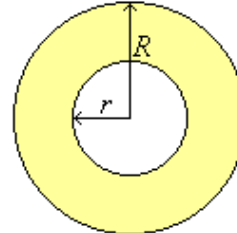
$$S = \pi \times R^2 \times \frac{\alpha}{360}$$

Formule de la surface d'un segment circulaire de α radians



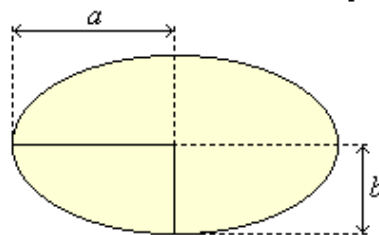
$$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha)$$

Formule de la surface d'une couronne circulaire



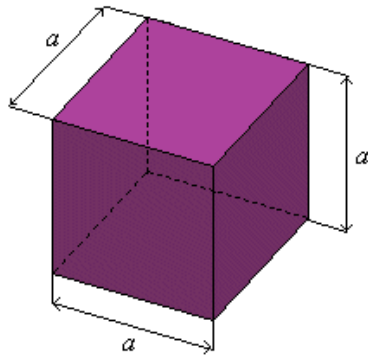
$$S = \pi \times (R^2 - r^2) = \pi \times \left(\frac{D^2 - d^2}{4} \right)$$

Formule de la surface d'une ellipse



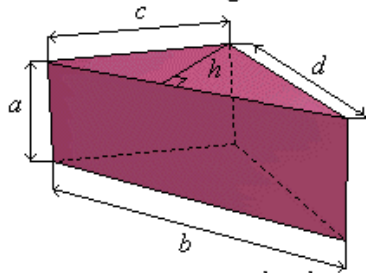
$$S = \pi \times a \times b$$

Formule du volume d'un cube



$$S = 6a^2 \quad V = a^3$$

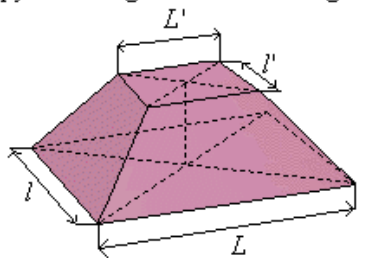
Formule du volume d'un prisme à base triangulaire



$$S = a \times b + a \times c + \frac{h \times d}{2}$$

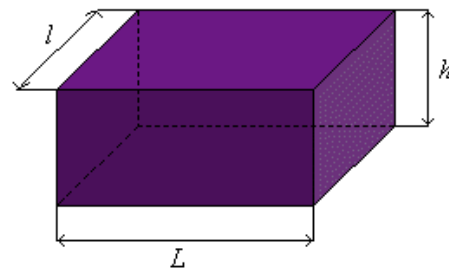
$$V = a \times \left(\frac{h \times d}{2}\right)$$

Formule du volume du tronc de pyramide régulier à base rectangulaire



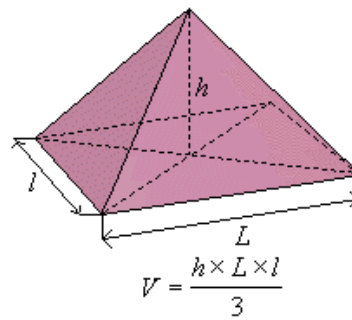
$$V = \frac{h}{3} \times (Ll + L'l' + \sqrt{LL'l'l'})$$

Formule du volume d'un parallélépipède rectangle



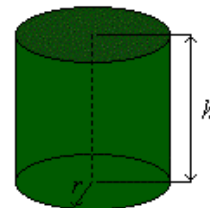
$$S = 2(L \times l + l \times h + L \times h) \quad V = L \times l \times h$$

Formule du volume d'une pyramide régulière à base rectangulaire



$$V = \frac{h \times L \times l}{3}$$

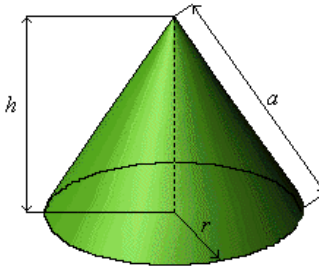
Formule du volume d'un cylindre



$$S = 2 \times \pi \times r \times (r + h)$$

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

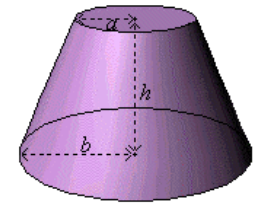
Formule du volume d'un cône



$$S = \pi \times r \times (a + r)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times r^2 \times h$$

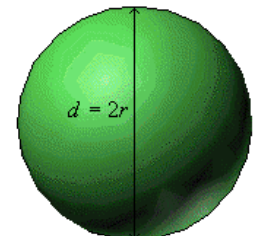
Formule du volume d'un tronc de cône



$$S_{latérale} = \pi \times (a + b) \times \sqrt{h^2 + (b - a)^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times h \times (a^2 + ab + b^2)$$

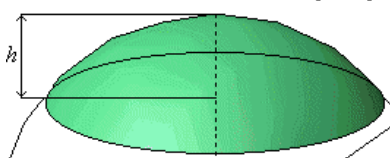
Formule du volume d'une sphère



$$S = 4 \pi \times r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \times r^3$$

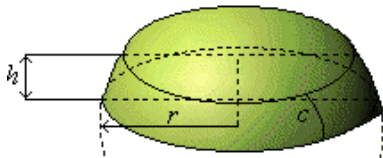
Formule du volume d'une calotte sphérique



$$S = 2 \pi \times r \times h$$

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$$

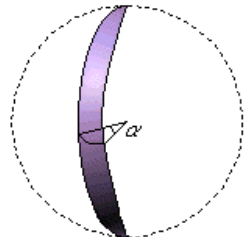
Formule du volume d'une zone sphérique



$$S = 2 \pi \times r \times h$$

$$V = \frac{1}{6} \pi \times c^2 \times h$$


Formule du volume d'un fuseau



$$S = \pi \times r^2 \times \frac{\alpha}{90}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \times r^3 \times \frac{\alpha}{360}$$

Formule du volume du tore de révolution



$$S = 4 \times \pi^2 \times R \times r$$

$$V = 2 \times \pi^2 \times r^2 \times R$$

ISSAE- Le cnam Liban

Noureddine ASSAAD

